

TEMA 28

Estudio global de funciones. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones.

I. INTRODUCCIÓN

II. DESARROLLO DEL TEMA

1. DOMINIO E IMAGEN. DISCONTINUIDADES.
2. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES. SIGNO DE LA FUNCIÓN.
3. SIMETRÍAS Y PERIODICIDAD.
4. RAMAS INFINITAS (ASÍNTOTAS).
5. MONOTONÍA: CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.
6. EXTREMOS RELATIVOS: MÁXIMOS Y MÍNIMOS.
7. CURVATURA: CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.
8. REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

III. BIBIOGRAFÍA

I. INTRODUCCIÓN

La gráfica de una función real $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un intervalo I (o en un conjunto más general de puntos de $\mathbb{R}$), es el siguiente conjunto de puntos del plano $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in I\}$, al cual llamamos curva de ecuación $y = f(x)$. Estudiaremos aquí si es monótona, si alcanza extremos, si es cóncava o convexa o si presenta puntos de inflexión. También consideraremos el caso en que el punto a estudiar es un punto del infinito, dedicándonos entonces a buscar la asíntota si la hubiera.

II. DESARROLLO DEL TEMA

1. DOMINIO E IMAGEN. DISCONTINUIDADES

Definición:

Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ se dice que es una función **real de variable real**, si $X \subseteq \mathbb{R}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$

Al conjunto X se le llama **Dominio de la función** y se denota como:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Dominios de funciones elementales:

• **Funciones polinómicas:** $f(x) = P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

• **Funciones racionales:** $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x), Q(x)$ polinomios.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x : Q(x) = 0\}.$$

• **Funciones irracionales:** $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$. Hay que distinguir dos casos:

1) Si n es impar, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

2) Si n es par, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x : g(x) < 0\}$

• **Funciones exponenciales:** $f(x) = a^{g(x)}$. $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$

• **Funciones logarítmicas:** $f(x) = \log_a g(x)$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x : g(x) \leq 0\}$

• **Funciones trigonométricas:** $\begin{cases} f(x) = \text{Sen}(g(x)) \\ f(x) = \text{Cos}(g(x)) \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$

- **Función compuesta:** $f(x) = g \circ h(x)$. El dominio de f es la intersección de los dos dominios (de g y h).

Definición:

Se llama **imagen o recorrido** al conjunto de valores que toma la función.

$$\text{Im } f = \{y \in R / \exists x : f(x) = y\}$$

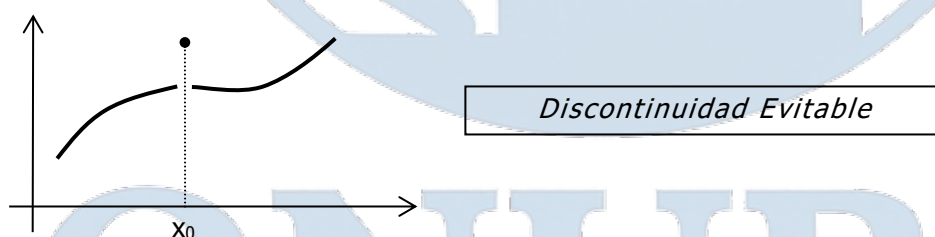
También podemos considerarlo como el dominio de la función inversa $\text{Im}(f) = \text{Dom}(f^{-1})$

También hemos de estudiar la continuidad y discontinuidad de la función; es decir, los puntos donde la función es continua y los puntos que presentan discontinuidad dentro del dominio.

Definición:

▪ Sea $A \subset \mathbb{R}$ ($A \neq \emptyset$) y sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, definida al menos en un entorno de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Se dice que f es **continua** en x_0 si existe el límite de f en x_0 y dicho límite es igual a $f(x_0)$; es decir, si: $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$.

▪ Se dice que f es **discontinua** en x_0 si no es continua en dicho punto. En tal caso, la discontinuidad se dice **evitable** si existe y es finito el límite de f en x_0 pero no coincide con $f(x_0)$, ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$); en caso contrario, la discontinuidad se llama **esencial**.

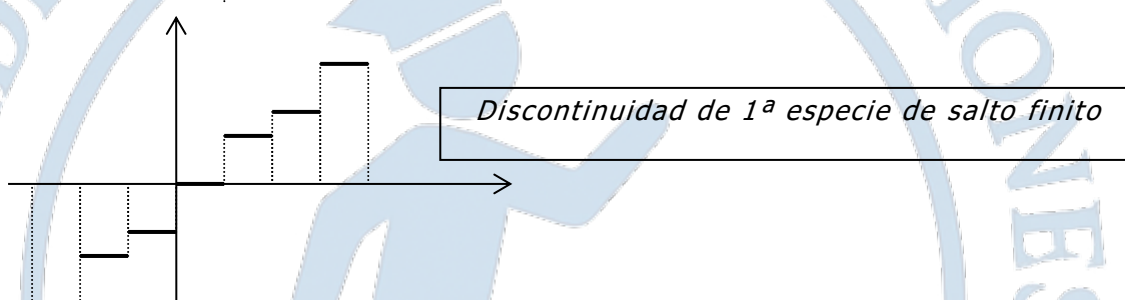
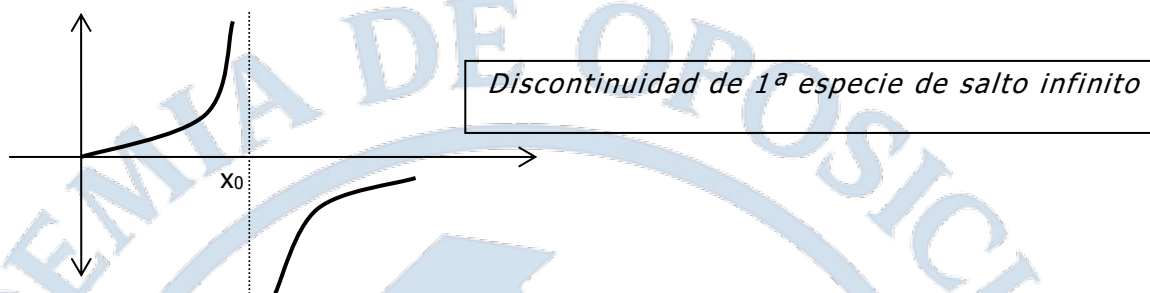


Proposición:

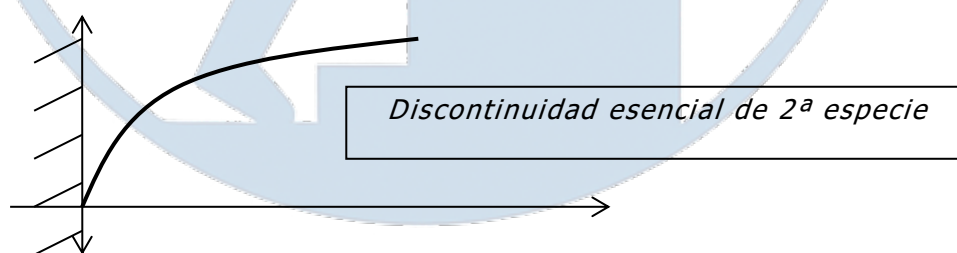
Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, definida al menos en un entorno de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

- a) La función f es continua en x_0 si y sólo si es continua por la izquierda y por la derecha y además los límites coinciden. $\exists f(x_0^+), f(x_0^-)$ y $f(x_0) = f(x_0^+) = f(x_0^-)$

- b) Si existen $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ y son distintos, entonces a esta discontinuidad de f en x_0 se le llama **discontinuidad esencial de primera especie** y a la diferencia $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ se le llama **salto finito** (cuando ambos límites son finitos) o **infinito** (cuando uno de ellos o ambos son infinitos) de f en x_0 .



- c) Si no existe alguno de los límites laterales $f(x_0^+)$ o $f(x_0^-)$, entonces a esta discontinuidad de f en x_0 se le llama **discontinuidad esencial de segunda especie**. La discontinuidad es finita cuando la función se conserva acotada e infinita en caso contrario.



2. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES. SIGNO DE LA FUNCIÓN.

En $\mathbb{R}$ tenemos que distinguir dos tipos de cortes: con el eje OX y con el eje OY

- **Corte con el eje OX:** son de la forma $(x_i, 0)$, siendo x_i las soluciones de la ecuación cuando $f(x) = 0$. En este caso puede haber ninguna, una o varias soluciones.

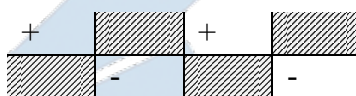
- **Corte con el eje OY:** son de la forma $(0, y_j)$, siendo y_j las soluciones de la ecuación cuando $x=0$, es decir, $y=f(0)$. En este caso puede haber ninguna o una solución.

Signo de la función:

Si $f(x) > 0 \Rightarrow$ la gráfica está por encima del eje OX

Si $f(x) < 0 \Rightarrow$ la gráfica está por debajo del eje OX

Es conveniente realizar un esquema para las regiones de existencia del siguiente modo:



3. SIMETRÍAS Y PERIODICIDAD.

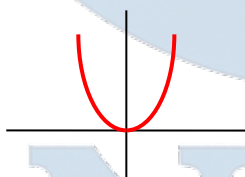
Simetrías:

Podemos distinguir dos tipos de simetrías:

- **Simetría respecto al eje Y:**

Decimos que una función es **par** si se verifica que $f(x) = f(-x)$.

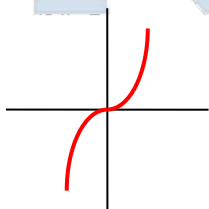
Por ejemplo $y = x^2$



- **Simetría respecto al origen, (0,0):**

Decimos que una función es **impar** si se verifica que $f(-x) = -f(x)$.

Por ejemplo $y = x^3$



Nota: si una función es par o impar, sólo es necesario estudiarla en $\mathbb{R}_+$, es decir, para valores positivos de x .

Periodicidad:

Una función f es **periódica** de período T , si se verifica que:

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

Una función periódica es suficiente con estudiarla en un período.

4. RAMAS INFINITAS (ASÍNTOTAS).

Si cuando $x \rightarrow x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$, finito o infinito, ocurre que el correspondiente punto $(x, f(x))$ de la curva es tal que su distancia al origen, tiende a $+\infty$, es decir, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x^2 + f(x)^2} = +\infty$, se dice que la curva $y = f(x)$ tiene una **rama infinita** cuando $x \rightarrow x_0$

Si la curva $y = f(x)$ tiene una rama infinita cuando $x \rightarrow x_0$ y, además, hay una cierta recta del plano tal que la distancia a ella del punto $(x, f(x))$ tiende a cero cuando $x \rightarrow x_0$, entonces dicha recta recibe el nombre de **asíntota** de la curva $y = f(x)$ cuando $x \rightarrow x_0$; en tal caso, se dice que la rama infinita es una **rama hiperbólica** de la curva, pues se comporta como lo hacen las ramas infinitas de las hipérbolas.

Hay otros tipos de ramas infinitas. Entre ellas están las **ramas parabólicas**, así llamadas por su similitud con las ramas infinitas de las parábolas. Cabe citar también a las ramas infinitas de las funciones periódicas, que oscilan indefinidamente, cuando $x \rightarrow \pm \infty$, o las ramas en espiral, típicas de curvas expresadas en coordenadas polares.

Definición:

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I y supongamos que la curva $y = f(x)$ tiene una rama infinita cuando $x \rightarrow x_0$ (donde $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$). Se dice que:

- (I) La rama infinita es hiperbólica si hay una recta (llamada *asíntota*) tal que la distancia del punto $(x, f(x))$ a ella tiende a cero cuando $x \rightarrow x_0$. Esto puede acontecer de uno de los tres modos siguientes:

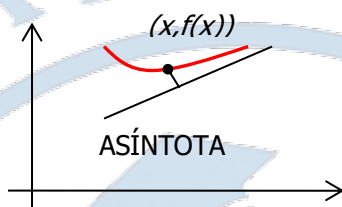
1º **[Asíntota vertical $x=x_0$]** si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$,

con $x_0 \in \mathbb{R}$

2º **[Asíntota horizontal $y=k$]** siendo $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, con $k \in \mathbb{R}$

3º **[Asíntota oblicua $y=mx+n$]** donde $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$,

con $m \in \mathbb{R}^*$ y $n \neq \pm\infty$

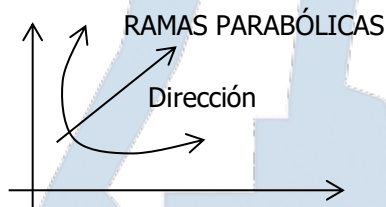


(II) La rama infinita es parabólica en los tres casos siguientes:

1º **[Rama parabólica horizontal]** cuando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

2º **[Rama parabólica vertical]** cuando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

3º **[Rama parabólica de pendiente m]** cuando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$
($m \neq 0$ y $m \neq \pm\infty$) y $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \pm\infty$



5. MONOTONÍA: CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.

Definición:

Si I es un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en I , decimos:

- f es **creciente** en I si y solo si, $f(a) \leq f(b) \quad \forall a, b \in I: a < b$ (Si la desigualdad es $<$, decimos que es estrictamente creciente)
- f es **decreciente** en I si y solo si, $f(a) \geq f(b) \quad \forall a, b \in I: a < b$ (Si la desigualdad es $>$, decimos que es estrictamente decreciente)

Proposición 1:

Sea I un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I . Se verifica que:

a) Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}$. Entonces f es estrictamente creciente en I
($\geq 0 \Rightarrow$ creciente)

b) Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}$. Entonces f es estrictamente decreciente en I
($\leq 0 \Rightarrow$ decreciente)

Dem:

a) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}$. Sean $a, b \in I : a < b$. Entonces, como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , por el teorema del valor medio de Lagrange, podemos afirmar que $\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Como $f'(x) > 0$ y $a < b$, entonces $f(b) > f(a)$, luego f es estrictamente creciente.

b) Análogo a a)

Búsqueda de los intervalos de crecimiento o decrecimiento

- 1) Localizar los valores de x en los que $f'(x) = 0$ (puntos críticos) o que $f'(x)$ no esté definida.
- 2) Estudiar el signo de f' en cada subintervalo determinado por dos puntos críticos consecutivos.
- 3) Deducir los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

6. EXTREMOS RELATIVOS: MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Definición:

- Decimos que una función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en un punto x_0 si $f(x_0) > f(x) \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ (en un entorno de x_0)
- Decimos que una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en un punto x_0 si $f(x_0) < f(x) \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ (en un entorno de x_0)

Si las desigualdades son estrictas en todo el intervalo, hablaremos de máximo y mínimo absolutos.

Teorema. Condición necesaria de existencia de máximo y mínimo

Si una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existe su derivada en $\overset{\circ}{I}$ admite un extremo relativo en un punto $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, entonces $f'(x_0) = 0$

Dem:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Supongamos que ese extremo es un máximo relativo, luego $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$:

- Si $h > 0$, como $f(x_0 + h) \leq f(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$
- Si $h < 0$, como $f(x_0 + h) \leq f(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$.

CONTRADICCIÓN con la existencia de la derivada

Teorema: Condición suficiente para la existencia de extremo relativo.

- Sea una función $f(x)$ tal que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$. Entonces la función presenta un mínimo relativo para $x = x_0$
- Sea una función $f(x)$ tal que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$. Entonces la función presenta un máximo relativo para $x = x_0$

Dem:

- Desarrollemos la función f por Taylor hasta la derivada segunda:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Habíamos visto que la condición necesaria para la existencia de extremo imponía que $f'(x_0) = 0$, luego teniendo en cuenta que $|R_2(x)| < \left| \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \right|$ podemos admitir que $\text{signo}(f(x) - f(x_0)) = \text{signo}\left(\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2\right)$, y en consecuencia, al ser $f''(x_0) > 0$ también será positivo $f(x) - f(x_0)$, para un entorno simétrico de x_0 , es decir, $f(x_0) < f(x)$, $\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta$ lo que indica que en x_0 hay un mínimo relativo.

- Análoga

Teorema. Generalización de la determinación de máximos y mínimos

Si la primera derivada, en el punto x_0 , no nula de la función $f(x)$ es de orden par, (o sea, $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ con n par).

- Si $f^{(n)}(x_0) > 0$ la función presenta un mínimo relativo en x_0
- Si $f^{(n)}(x_0) < 0$ la función presenta un máximo relativo en x_0

Dem:

Desarrollando por Taylor en x_0 , hasta n par. $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$ y dado que las derivadas anteriores son nulas, quedaría lo siguiente:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x) \text{ y basándonos en la igualdad de los signos,}$$

tenemos que $\text{signo}(f(x) - f(x_0)) = \text{signo}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n\right)$, con lo cual:

Si $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow$ Hay un mínimo relativo en x_0

Si $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow$ Hay un máximo relativo en x_0

Búsqueda de extremos en una función:

Una vez localizados los intervalos de crecimiento y decrecimiento, en los puntos críticos en que la función pase de creciente a decreciente habrá un máximo relativo; y en los que pase de decreciente a creciente habrá un mínimo relativo.

7. CURVATURA: CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Definición:

- Una función $y=f(x)$ es **cóncava** en un intervalo I , cuando las tangentes a la curva en los puntos de dicho intervalo quedan por encima de la curva. Es decir, cuando $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

O análogamente, cuando en un entorno de x_0 , la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la tangente, sea negativa.



- Una función $y=f(x)$ es **convexa** en un intervalo I , cuando las tangentes a la curva en los puntos de dicho intervalo quedan por debajo de la curva. Es decir, cuando $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

O análogamente, cuando en un entorno de x_0 , la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la tangente, sea positiva



- Decimos que una función $f(x)$ presenta un **punto de inflexión** en x_0 , si la diferencia entre la ordenada de la función y la ordenada de la tangente cambia de signo a la izquierda y a la derecha del punto x_0 .



Teorema 1:

- Sea una función $f(x)$ tal que existe $f''(x_0)$ y $f''(x_0) < 0$, cuando x_0 no es un punto de tangencia, la función es cóncava en x_0
- Sea una función $f(x)$ tal que existe $f''(x_0)$ y $f''(x_0) > 0$, cuando x_0 no es un punto de tangencia, la función es convexa en x_0 .

Dem:

- Desarrollemos la función f por Taylor hasta la derivada segunda:

$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(x)$ por otra parte la ecuación de la recta tangente a la curva en x_0 es: $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Estudiamos las diferencias de las ordenadas de la curva y la tangente:

$$f(x) - g(x) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(x)$$

y como ya sabemos, el signo $(f(x) - g(x)) = \text{signo}\left(\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2\right)$, y además como

$f''(x_0) < 0$, entonces $f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$. Luego la función está por debajo de la recta tangente $\Rightarrow f(x)$ es cóncava

- Análogo a a)

Teorema 2:

Si la primera derivada, en el punto x_0 , no nula de la función $f(x)$ es de orden impar, (O sea, $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ con n impar), la función presenta un punto de inflexión en x_0 .

Dem:

Supongamos que las sucesivas derivadas en x_0 de la función son nulas hasta un cierto $n \in \mathbb{N}^*$ (n impar).

Desarrollamos por Taylor hasta la derivada n -ésima para $x = x_0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_n(x)$$

y teniendo en cuenta la ecuación de la recta tangente a la curva que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$, que sería $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. La diferencia entre las ordenadas vendría dada por: $f(x) - g(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$

y, una vez más, considerando los signos, sabemos que:

$\text{signo}(f(x) - g(x)) = \text{signo}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$, tenemos pues las siguientes posibilidades

n impar	$f^{(n)}(x_0) > 0$	$f^{(n)}(x_0) < 0$
$x < x_0$ $(x - x_0)^n < 0$	$f(x) - g(x) < 0$	$f(x) - g(x) > 0$
$x > x_0$ $(x - x_0)^n > 0$	$f(x) - g(x) > 0$	$f(x) - g(x) < 0$

Luego, la presencia de distintos signos, nos indica la existencia de un punto de inflexión.

Búsqueda de los intervalos de concavidad y convexidad.

- 1) Se localizan los x tal que $f''(x) = 0$ o f'' no esté definida
- 2) Se consideran los subintervalos determinados por dos puntos consecutivos.
- 3) Se determina el signo de f'' en cada subintervalo.

8. REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

La gráfica de la función f es el lugar geométrico de los puntos de plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = f(x)$.

Construir una tabla de valores con los puntos característicos ya calculados más otros convenientemente elegidos, facilitan la representación gráfica.

Ejemplos:

- a) Representar gráficamente $y = \frac{1}{x^2 + 3}$

Dominio:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

Recorrido:

$\mathbb{R}_+$

Puntos de corte con los ejes:

- OY: $x=0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$
- OX: $y=0 \Rightarrow$ no existe punto de corte con el eje X

Simetría:

$f(x)=f(-x) \Rightarrow$ la función es par, luego es simétrica respecto de eje Y

Asíntotas:

A.V. no tiene

A.H $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal

A.O. $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, luego no tiene A.O.

Monotonía:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

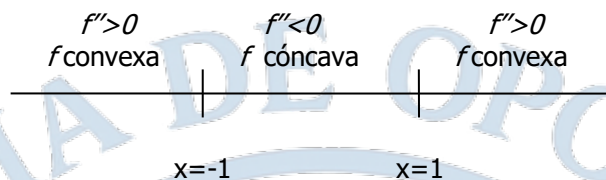
$f' > 0$	$f' < 0$
f creciente	f decreciente
$x=0$	

Luego la función presenta un máximo relativo en $(0, \frac{1}{3})$

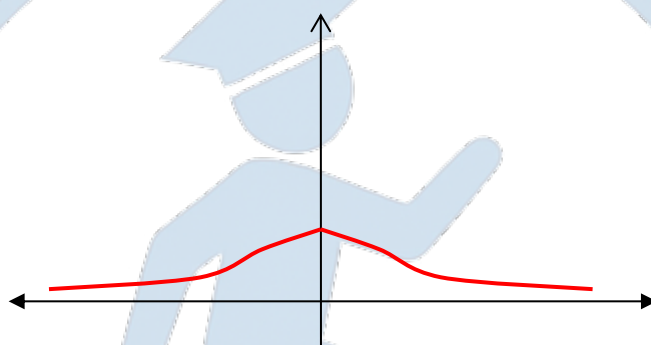
ONUBA.®

Curvatura:

$$f''(x) = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$



Luego en $x = -1$ y $x = 1$ hay puntos de inflexión: $(-1, \frac{1}{4})$ $(1, \frac{1}{4})$



b) Representar gráficamente $8xy - x + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{x-1}{8x}$

Dominio:

$$\mathbb{R} - \{0\}$$

Corte con los ejes:

- OY: $x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ luego no corta al eje Y
- OX: $y = 0 \Rightarrow x = 1$, obtenemos el punto $(1, 0)$

Asíntotas:

A.V. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. Entonces $x = 0$ es asíntota vertical

A.H. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{8}$ es Asíntota Horizontal

A.O. $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{8}$. No tenemos asíntotas oblicuas.

Monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{8x^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

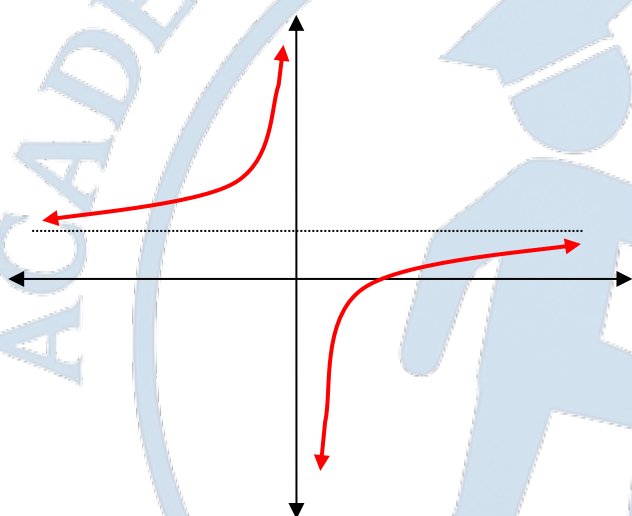
$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Curvatura:

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Si } x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } (-\infty, 0)$$

$$\text{Si } x \in (0, +\infty) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } (0, +\infty)$$



III. BIBLIOGRAFÍA

- Apóstol, T. Calculus
- Spivak, M. Calculus
- Aparicio del Prado, C. Análisis Matemático I
- McGraw-Hill. Cálculo infinitesimal de una variable.
- Deimos
- Cede