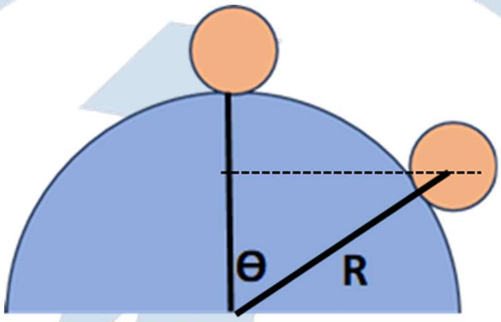
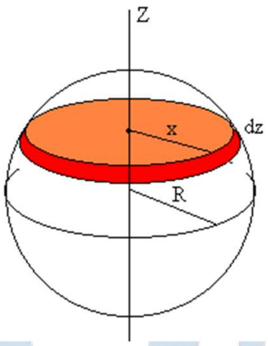
Ejercicio práctico. Examen oposición País Vasco (2012)

Una esfera maciza de masa *m* y radio *r*, rueda sin deslizar a lo largo de una cúpula de radio *R*, tal y como puede verse en la figura. Se desplaza la esfera de la posición de equilibrio instable, comenzando a rodar a lo largo de la cúpula y deja de tener contacto con ella para un determinado ángulo con la vertical.

a) Deducir la expresión del momento de inercia de una esfera maciza
b) Calcular el ángulo en el que la esfera abandona la cúpula.

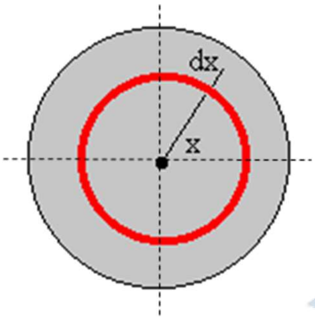


a) Tenemos una esfera maciza y, al no decir lo contrario en el enunciado, homogénea de densidad constante. De este modo podemos dividir infinitesimalmente la esfera en discos de espesor *dz* y calcular diferenciales de su momento de inercia *dI*. El momento de inercia total I_{esf} será la integral de todos los diferenciales:



$$I_{esf} = \int_{-R}^{+R} dI$$

Cada uno de los círculos, las secciones de la esfera marcadas en naranja, tiene asociado un momento de inercia que puede ser calculado a partir de secciones anulares de esos círculos:



$$I_{círculo} = \int_0^R x^2 dm = \int_0^R 2\pi\sigma x\, dx = 2\pi\sigma \int_0^R x^3 dx = \frac{1}{2} mR^2$$

Para realizar estos cálculos hemos tenido en cuenta que:

$$dm = 2\pi\sigma x\, dx$$

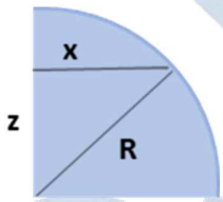
Y a su vez al ser de densidad constante, $\sigma = \frac{m}{\pi R^2} \rightarrow m = \pi\sigma R^2$ cambio que se ha realizado una vez calculada la integral.

Retomando la expresión integral del momento de inercia, sustituimos el valor de *dI,* teniendo en cuenta que el radio del disco será en este caso *x,* dependiente de la altura *z*:

$$I_{esf} = \int_{-R}^{+R} dI = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} x^2 dm = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} x^2 (\pi x^2 \rho dz) = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} \pi x^4 \rho dz$$

El cambio de *dm* a *dz* está justificado pues no podemos calcular la cantidad de masa disponible al ser un dato desconocido. Sin embargo, esta cantidad diferencial de masa será directamente proporcional al "espesor" del disco, nombrado como *dz*. Por supuesto este cambio de variable es válido suponiendo un disco de radio *x* y de densidad contante.

Ahora debemos relacionar *x* y *z*, o lo que es igual, el tamaño del disco en función de la altura a la que se encuentra en la esfera. Esta realización viene dada por el radio de la esfera *R*:



$$R^2 = x^2 + z^2$$

$$x^2 = (R^2 - z^2)$$

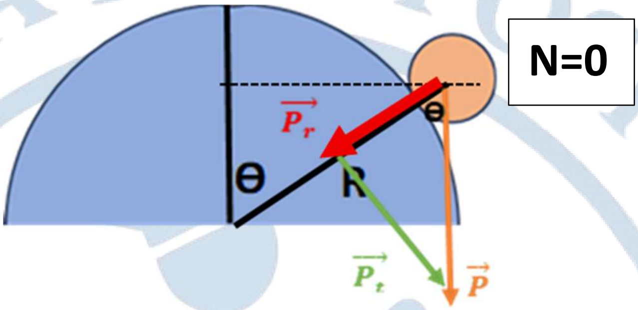
Retomanto la integral:

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{2} \pi x^4 \rho dz = \frac{1}{2} \pi\rho \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{16\pi\rho R^5}{30}$$

Teniendo la esfera una densidad: $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \rightarrow \rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$, obteniendo así el valor del momento de inercia de la esfera:

$$I_{esfera} = \frac{2}{5} mR^2$$

b) Para obtener el ángulo en el que la esfera pierde el contacto primero debemos establecer qué condición debe cumplirse en esa situación.
Mientras que la esfera pequeña rueda sin deslizar existen dos fuerzas que actúan: el peso, responsable del movimiento, y la normal, la reacción entre ambas superficies.
Cuando las esferas se separan la normal deja de actuar ya que no hay contacto entre ellas. Esa es la condición a aplicar N=0.



La componente radial del peso actúa como fuerza centrípeta, luego puede determinarse que:

$$P_r = m\frac{v^2}{R+r}$$

A su vez, el módulo del vector P_r se relaciona con el peso mediante θ:

$$P_r = mgcos\theta$$

Igualando ambas expresiones se obtiene un valor para la velocidad en el momento que la esfera pequeña abandona el contacto con la grande:

$$v^2 = gcos\theta\,(R+r) \qquad (1)$$

Puesto que no podemos continuar resolviendo el ejercicio con expresiones de la dinámica debemos recurrir a expresiones energéticas. En este caso emplearemos el Principio de conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_c = \Delta E_p$$

En este caso, la energía cinética inicial es cero y la final es la suma de la energía de traslación y rotación.

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mg\left((R+r) - (R+r)cos\theta\right)$$

Tomando la velocidad angular $\omega = \frac{v}{r}$ y sustituyendo el valor del momento de inercia del apartado anterior se obtiene:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 = g\big((R+r)(1-cos\theta)\big)$$

$$v^2 = \frac{10}{7}\,g\big((R+r)(1-cos\theta)\big) \qquad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) se puede obtener un valor para el ángulo en el que se pierde el contacto entre ambas esferas:

$$gcos\theta\,(R+r) = \frac{10}{7}g\big((R+r)(1-cos\theta)\big)$$

$$cos\theta = \frac{10}{17} \;\rightarrow\; \theta = \arccos\left(\frac{10}{17}\right) = 53.97°$$