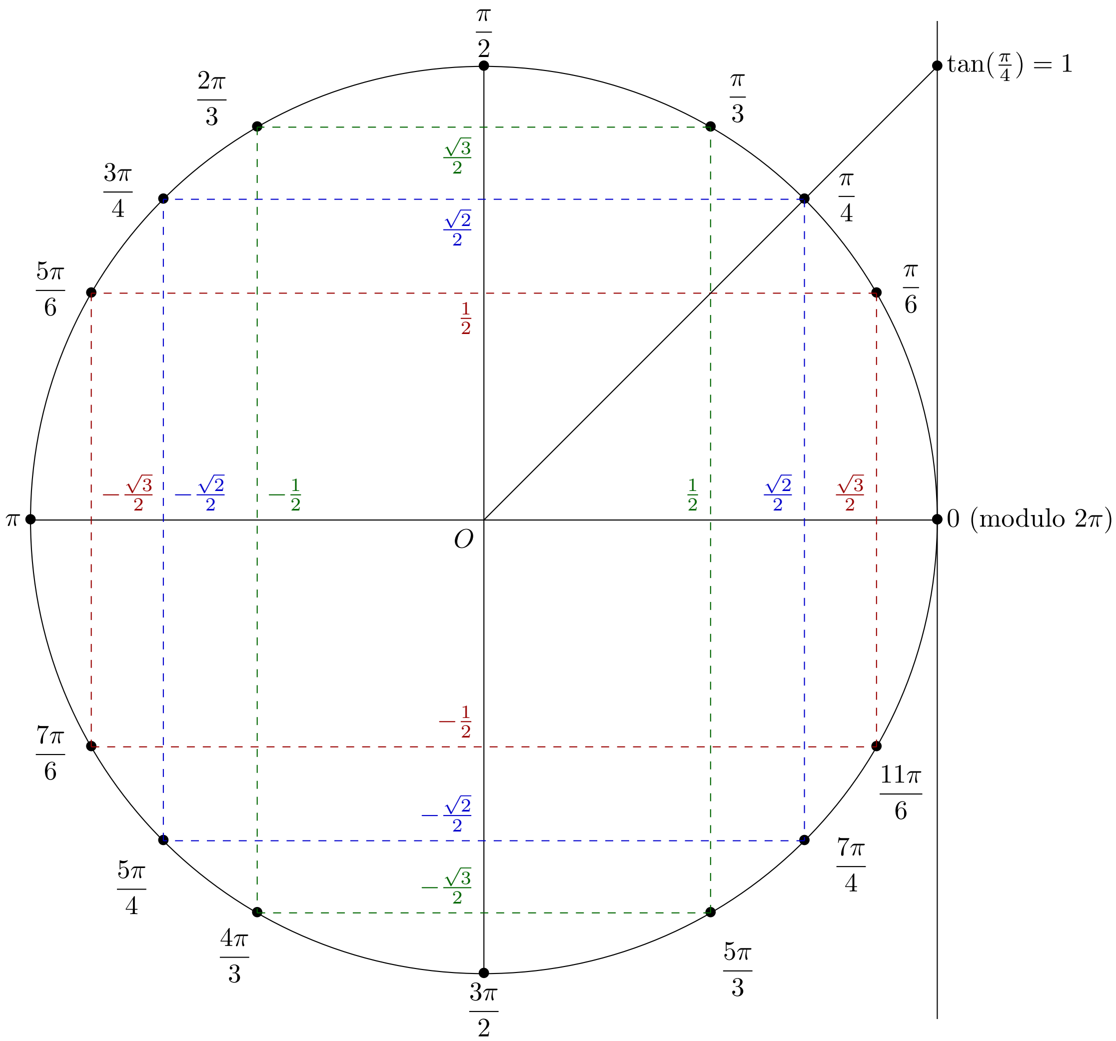
# Formulaire de trigonométrie

Tout point $M$ du cercle trigonométrique (c'est-à-dire du cercle de centre $O$ et de rayon 1) peut être repéré par un couple de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, où cos et sin désignent respectivement les fonctions cosinus et sinus et l'angle $\theta$ est défini de manière unique, à un multiple de $2\pi$ près.

## Le cercle trigonométrique : valeurs particulières




| **Angle $\boldsymbol{\theta}$** | **0** | $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ | $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ | $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ | $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **cos($\boldsymbol{\theta}$)** | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| **sin($\boldsymbol{\theta}$)** | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| **tan($\boldsymbol{\theta}$)** | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Non défini |

# Liens entre les fonctions cosinus et sinus

Une simple lecture du cercle trigonométrique permet de retrouver facilement les relations suivantes valables pour tout nombre réel $\theta$, sauf mention contraire.

| | | |
|---|---|---|
| **Relation fondamentale :** | $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ | |
| **Relation entre cosinus et sinus :** | $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$ |
| | $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(\theta)$ |
| **Fonction cosinus :** | $\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$ | $\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$ |
| | $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ | la fonction cosinus est paire |
| **Fonction sinus :** | $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$ | $\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$ |
| | $\sin(-\theta)=\sin(\theta)$ | la fonction sinus est impaire |
| **Fonction tangente :** | $\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ | (pour $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$) |
| | $1+\tan^2(\theta)=\frac{1}{\cos^2(\theta)}$ | (pour $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$) |
| | $\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$ | (pour $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$) |
| | | la fonction tangente est impaire |

# Formules d'addition

Pour tous nombres réels $a$ et $b$,

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\qquad \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\qquad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

et, si $a\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $b\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\tan(a)\tan(b)\neq\pm1$, alors :

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\qquad \tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

# Formules de duplication

Pour tout nombre réel $\theta$,

$$\begin{aligned}\cos(2\theta)&=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\\&=2\cos^2(\theta)-1\\&=1-2\sin^2(\theta)\end{aligned}\qquad \sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

et si $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\theta\not\equiv\frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, alors :

$$\tan(2\theta)=\frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$$

# Transformation d'un produit en somme

Pour tous nombres réels $a$ et $b$,

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \qquad \sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

$$\text{et} \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

# Transformation d'une somme en produit

Pour tous nombres réels $a$ et $b$,

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)+\sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

# Tangente de l'angle moitié

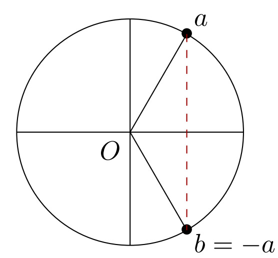
Pour tout nombre réel $\theta$ tel que $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$, alors en posant $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$$

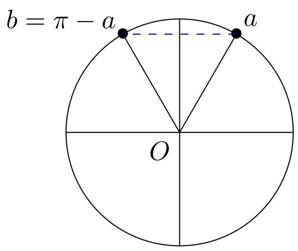
et, si de plus $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors :

$$\tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$$

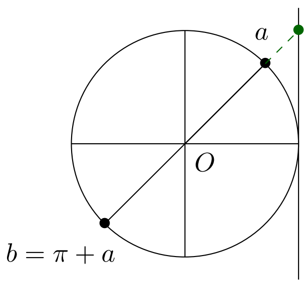
# Résolution d'équations trigonométriques




$$\boxed{\cos(a)=\cos(b) \iff a \equiv b\ [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b\ [2\pi]}$$




$$\boxed{\sin(a)=\sin(b) \iff a \equiv b\ [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi-b\ [2\pi]}$$




$$\boxed{\tan(a)=\tan(b) \iff a \equiv b\ [\pi]} \qquad \text{si } a,b \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$$