Suites usuelles (formulaire)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Suites arithmétiques

Relation de récurrence :	$u_{n+1} = u_n + r$	(r étant la *raison* de la suite)
Expression de u_n en fonction de n :	$u_n = u_0 + nr$	
Somme des premiers termes :	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$	$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{(n-m+1)(u_m+u_n)}{2}$

Moyen mnémotechnique : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} \ + \ \text{dernier terme}}{2}$

Suites géométriques

Relation de récurrence :	$u_{n+1} = q \times u_n$	(q étant la *raison* de la suite)
Expression de u_n en fonction de n :	$u_n = u_0 \times q^n$	
Somme des premiers termes ($q \neq 1$) :	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$

Moyen mnémotechnique : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = (\text{premier terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

Suites arithmético-géométriques

Relation de récurrence :	$u_{n+1} = \alpha \times u_n + \beta$	
Expression de u_n en fonction de n :	$u_n = \alpha^n u_0 + \beta \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$	(pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)

Méthode : pour trouver l'expression de u_n en fonction de n, on résout l'équation $\ell = \alpha\ell + \beta$ puis on montre que $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique [1].

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Relation de récurrence :	$u_{n+2} = \alpha\, u_{n+1} + \beta\, u_n$	
Équation caractéristique :	$\lambda^2 - \alpha\,\lambda - \beta = 0$	(ensemble de solutions $\mathcal{S}$, discriminant Δ)

Expression de u_n en fonction de n :

$$u_n = \begin{cases} A\,\lambda_1^n + B\,\lambda_2^n & \text{si } \Delta > 0 \text{ et } \mathcal{S} = \{\lambda_1, \lambda_2\} \\ (A + B\,n)\,\lambda_0^n & \text{si } \Delta = 0 \text{ et } \mathcal{S} = \{\lambda_0\} \\ r^n\,(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)) & \text{si } \Delta < 0 \text{ et } \mathcal{S} = \left\{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}, r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right\} \end{cases}$$

1. La formule donnant l'expression de u_n en fonction de n pour une suite arithmético-géométrique n'est pas exigible. Par contre, la méthode permettant de trouver cette expression l'est.