

SOMMES ET PRODUITS (FORMULAIRE)

COEFFICIENTS BINOMIAUX

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On a les formules suivantes :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ (symétrie)}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} \text{ (formule sans nom)} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \text{ (triangle de Pascal)}$$

SOMMES SIMPLES

★ **Nombres de termes** : pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leq n$, on a :

$$\sum_{k=0}^n 1 = n+1 \qquad \sum_{k=1}^n 1 = n \quad (\text{si } n \geq 1) \qquad \sum_{k=m}^n 1 = n-m+1$$

★ **Somme des premiers entiers, des premiers carrés** : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

★ **Somme d'une suite géométrique** : pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leq n$, on a :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^n x^k = x^m \times \frac{1-x^{n-m+1}}{1-x}$$

★ **Somme télescopique** : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2}$, on a : $\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$ (à savoir retrouver au cas par cas)

★ **Formule du binôme de Newton** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

★ **Formule de factorisation** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

SOMMES DOUBLES

★ Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ une famille de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{i,j}$$

★ Dans le cas où $m = n$, alors la somme de la famille de nombres complexes $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ vaut :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

PRODUITS

Pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leq n$, on a :

$$\prod_{k=0}^n c = c^{n+1} \qquad \prod_{k=m}^n c = c^{n-m+1} \qquad \prod_{k=1}^n k = n!$$