

SÉRIES NUMÉRIQUES

1 Nature de séries

Exercice 1 Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants :

1. $u_n = \frac{n}{2^n + n}$
2. $u_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n+1}}$
3. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
4. $u_n = \ln(n)^{-\ln(n)}$
5. $u_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$
6. $u_n = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$
7. $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
8. $u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}$
9. $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
10. $u_n = \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right)^{\sqrt{n}}$
11. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$
12. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 2 Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$
3. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
4. $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

Exercice 3 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}$$

Exercice 4 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$$

Exercice 5 Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

Exercice 6 Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 3n}$
2. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{7^n}$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$

Exercice 7 1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 8 Soit $x \in [0, 1]$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.
2. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1} dt,$$

calculer la somme de la série.

Exercice 9 On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Exercice 10 (constante d'Euler-Mascheroni) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

2. En déduire l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

2 Séries abstraites

Exercice 11 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$

converge. Étudier la nature des séries suivants :

$$1. \sum_{n \geq 0} a_n^2 \quad 2. \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{1 + a_n} \quad 3. \sum_{n \geq 0} a_n a_{2n} \quad 4. \sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

Exercice 12 Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \max(u_n, v_n)$ converge.

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

3. On suppose que la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ est convergente.

Exercice 13 (critère de Raabe-Duhamel) 1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs strictement positives telles que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(a) On suppose que $\alpha > 1$. À l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

(b) On suppose que $\alpha < 1$. Montrer la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

(c) On suppose que $\alpha = 1$. À l'aide d'exemples, montrer qu'on ne peut rien conclure en général.

3. *Application* : déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$$

Exercice 14 (règle de d'Alembert) Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. Montrer que si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

2. Montrer que si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell > 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

3. *Application* : étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 15 (sommation d'Abel) Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n \geq n_0}, (B_n)_{n \geq n_0}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0, \quad A_n = \sum_{k=n_0}^n a_k \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$$

2. Utiliser la question précédente pour étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$.

3 Comparaison série-intégrale

Exercice 16 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $\alpha \in]-\infty, 1[$, déterminer un équivalent de $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 17 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 18 En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\ln(n!)$ quand n tend vers $+\infty$.