Question 997

Vincent Devinck

Question. Pour tout réel x de $]0, \pi/2]$, on considère la suite définie par la relation $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et la donnée de son premier terme $u_0 = x$. Le développement asymptotique à deux termes de cette suite est classique : lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\ln n}{10n\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$$

Voici deux questions :

a) Peut-on trouver le troisième terme ?

b) Quelle est l'influence de la valeur initiale x sur ce troisième terme ? En particulier, que se passe-t-il lorsque x se rapproche de 0 ?

(Nicolas Popoff)

Solution. Les réponses aux deux questions sont contenues dans le résultat suivant.

Théorème 1. *Il existe une fonction croissante* $C : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, *on ait au voisinage de* $+\infty$:

$$u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10n\sqrt{n}} + \frac{C(x)}{n\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

avec :

$$C(x) \underset{0^+}{=} -\frac{3\sqrt{3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{3}}{5}\ln(x) + \frac{3\sqrt{3}\ln(3)}{10} + \mathcal{O}(x^2)$$

En particulier, $C(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{-3\sqrt{3}}{2x^2}$.

Le développement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ repose sur le lemme suivant.

Lemme 1. *Il existe une fonction* $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* :

- ⋆ *pour tout* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(\sin(x)) - f(x) = \dfrac{1}{3}$
- ⋆ $f(x) \underset{0^+}{=} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{5}\ln(x) + \mathcal{O}(x^2)$

Pour démontrer ces résultats, nous supposerons simplement acquis le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, avec la vitesse $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$, ce qu'il est aisé d'obtenir. Commençons par la démonstration du théorème.

Démonstration du théorème. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. L'identité vérifiée par la fonction f du lemme fournit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f(u_{k+1}) - f(u_k) = \frac{1}{3}$$

ce qui nous donne, en sommant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(u_n) = f(x) + \frac{n}{3}$$

En utilisant le développement asymptotique de f au voisinage de 0 donné dans le lemme, on a (puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite 0) :

$$\frac{1}{u_n^2} + \frac{2}{5}\ln(u_n) + \mathcal{O}(u_n^2) \underset{+\infty}{=} f(x) + \frac{n}{3} \tag{1}$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$, on a :

$$\ln(u_n) \underset{+\infty}{=} \ln\left(\sqrt{\frac{3}{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\ln(3)}{2} - \frac{\ln(n)}{2} + \mathrm{o}(1)$$

Comme de plus $u_n^2 \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$, l'égalité (1) se réécrit :

$$\frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{=} \frac{n}{3} + \frac{\ln(n)}{5} - \frac{\ln(3)}{5} + f(x) + \mathrm{o}(1)$$

On en déduit donc que (puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$) :

$$\begin{aligned}|u_n| = u_n &\underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}}\left(1 + \frac{3\ln(n)}{5n} + \frac{15f(x) - 3\ln(3)}{5n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10n\sqrt{n}} + \frac{3\sqrt{3}\ln(3) - 15\sqrt{3}f(x)}{10n\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3\ln(n)}{5n} + \frac{15f(x) - 3\ln(3)}{5n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$. Ceci démontre le résultat annoncé avec :

$$C(x) = \frac{3\sqrt{3}\ln(3) - 15\sqrt{3}f(x)}{10}$$

Le développement asymptotique de C au voisinage de 0^+ découle directement de celui de f annoncé dans le lemme.
Pour établir la croissance de la fonction C sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, isolons $C(x)$ dans le développement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad C(x) = \lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\left(u_n - \sqrt{\frac{3}{n}} + \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10n\sqrt{n}}\right)$$

La fonction sinus est croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et cet intervalle est stable par la fonction sinus donc la fonction (de la variable x) :

$$u_n = \underbrace{\sin \circ \cdots \circ \sin}_{n \text{ fois}}$$

est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où la monotonie annoncée de la fonction C. $\square$

Nous nous concentrons maintenant sur la construction de la fonction f du lemme.

Démonstration du lemme. Le point de départ est le développement asymptotique classique suivant :

$$\frac{1}{\sin(x)^2} \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + \mathcal{O}(x^4) \tag{2}$$

L'idée de la construction de la fonction f réside dans la gestion du terme reste $\frac{x^2}{15} + \mathcal{O}(x^4)$ de ce développement asymptotique. Nous allons procéder par *superposition* de fonctions.

- $\star$ En considérant la fonction $f_1 : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$, on a clairement, d'après (2) :

$$f_1(\sin(x)) - f_1(x) \underset{0^+}{=} \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + \mathcal{O}(x^4)$$

- $\star$ L'idée est ensuite de chercher une fonction $f_2 : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f_2(\sin(x)) - f_2(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{15} \tag{3}$$

On peut chercher f_2 sous la forme $x \longmapsto \alpha \ln(x)$ (où $\alpha \in \mathbb{R}^*$). En effet :

$$\begin{aligned} f_2(\sin(x)) - f_2(x) = \alpha \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &\underset{0^+}{=} \alpha \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right) \\ &\underset{0^+}{=} -\frac{\alpha x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4) \end{aligned}$$

En posant $\alpha = \frac{2}{5}$, la relation (3) est vérifiée et le terme d'erreur obtenu nous permet d'écrire que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad (f_1 + f_2)(\sin(x)) - (f_1 + f_2)(x) = \frac{1}{3} + \varphi(x)$$

où la fonction φ est telle que $\varphi(x) \underset{0^+}{=} \mathcal{O}(x^4)$.

- $\star$ Il s'agit maintenant de trouver une fonction f_3 telle que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad f_3(\sin(x)) - f_3(x) = -\varphi(x)$$

Formellement, il suffit de poser :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad f_3(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(u_k) \qquad \text{où} \qquad u_k = (\underbrace{\sin \circ \cdots \circ \sin}_{k \text{ fois}})(x)$$

Or on sait que $u_k \underset{k \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{k}}$ donc $\varphi(u_k) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, ce qui assure la convergence de la série de terme général $\varphi(u_k)$. La fonction f_3 est donc bien définie.

La fonction $f = f_1 + f_2 + f_3$ vérifie donc le premier point du lemme. Le deuxième point est vérifié si $f_3(x) \underset{0^+}{=} \mathcal{O}(x^2)$. Fixons $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On cherche à majorer séparément chacune des sommes $\sum_{k=0}^{N} \varphi(u_k)$ et $\sum_{k=N+1}^{+\infty} \varphi(u_k)$. On sait qu'il existe des constantes strictement positives D et E (indépendantes de x) telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{D}{\sqrt{k}} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ \varphi(x) \leqslant Ex^4$$

On a donc, d'une part :

$$\sum_{k=0}^{N} \varphi(u_k) \leqslant \sum_{k=0}^{N} E u_k^4 \leqslant E(N+1)x^4$$

en utilisant la décroissance de $(u_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ (tous les termes sont donc majorés par $u_0 = x$). D'autre part :

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \varphi(u_k) \leqslant E \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k^4 \leqslant D^4 E \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant D^4 E \int_{N}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

par décroissance de la fonction $t \longmapsto t^{-2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient donc :

$$f_3(x) \leqslant E(N+1)x^4 + \frac{D^4 E}{N}$$

Posons maintenant $N = \lfloor x^{-2} \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$. Alors $N^{-1} \leqslant x^2$ et donc :

$$f_3(x) \leqslant (D^4+1)Ex^2 + 2Ex^4$$

Finalement, on a bien $f_3(x) \underset{0^+}{=} \mathcal{O}(x^2)$ ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$