Question 993

Vincent Devinck

Question. On considère les suites finies $(a_1, \dots, a_p)$ de réels telles que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \qquad 0 \leq a_i \leq i$$

a) Prouver qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute suite vérifiant les conditions ci-dessus, on ait :

$$\sum_{k=1}^{p} a_k \leqslant C \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k \right)^{2/3}$$

b) Montrer qu'on ne peut pas diminuer l'exposant $\frac{2}{3}$.

c) Déterminer la plus petite constante C vérifiant l'inégalité ci-dessus pour toutes les suites finies $(a_1, \dots, a_p)$.

(Richard Antetomaso)

Une réponse. Pour tout entier naturel p non nul, notons K_p le compact :

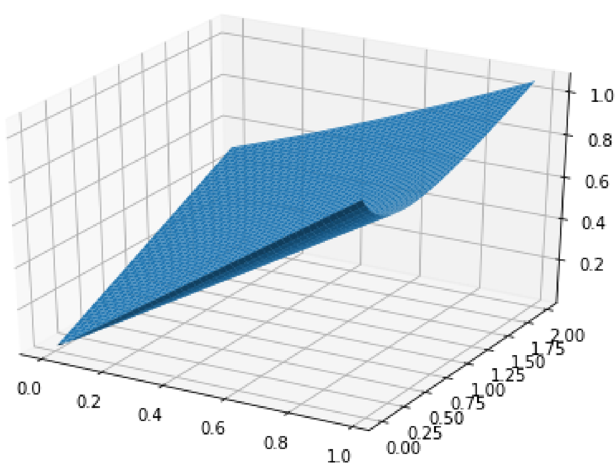
$$K_p = [0, 1] \times [0, 2] \times \cdots \times [0, p]$$

et f_p la fonction de p variables définie sur K_p par :

$$\forall \boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_p) \in K_p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}, \qquad f_p(\boldsymbol{a}) = \frac{n(\boldsymbol{a})^3}{d(\boldsymbol{a})^2} \qquad \text{et} \qquad f_p(0_{\mathbb{R}^p}) = 0$$

où l'on a posé :

$$n(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{p} a_k \qquad \text{et} \qquad d(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{p} k a_k$$




```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def f(x,y) :
    return (x+y)**3/(x+2*y)**2

ax = Axes3D(plt.figure())
X = np.arange(0,1,0.02)
Y = np.arange(0,2,0.02)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = f(X, Y)
ax.plot_surface(X, Y, Z)
plt.show()
```

Figure 1 : représentation graphique de la surface $z = f_2(x, y)$

Remarquons que la fonction f_p est continue sur K_p, en tant que quotient de fonctions polynomiales sur $K_p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ et car on a les inégalités suivantes (en notant $\|\cdot\|_1$ la norme ℓ^1 sur $\mathbb{R}^p$ et en minorant le dénominateur de f_p) :

$$\forall (a_1, \ldots, a_p) \in K_p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}, \qquad 0 \leqslant f_p(a_1, \ldots, a_p) \leqslant \|(a_1, \ldots, a_p)\|_1$$

Donc f_p admet un maximum (noté M_p) atteint en (au moins) un point du compact K_p. Pour répondre aux questions **a)** et **c)**, il suffit de calculer ce maximum M_p et de vérifier que l'ensemble $\{M_p \,|\, p \geqslant 1\}$ possède une borne supérieure $M < +\infty$; la constante optimale cherchée à la question **c)** sera alors $M^{1/3}$.
Cependant, commençons par remarquer qu'il ait aisé de répondre directement à la première question (la constante obtenue n'étant par contre pas optimale), sans étudier la fonction f_p sur K_p. En effet, par positivité des sommants, on a l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\right)^3 = \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant p} a_i a_j a_k \leqslant 3\,! \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant p} a_i a_j a_k$$

Ensuite :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant p} a_i a_j a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k \sum_{j=1}^{k} a_j \sum_{i=1}^{j} a_i$$

puis on majore la somme intérieure en exploitant les conditions sur les coefficients a_i. On sait en effet que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \forall j \in [\![1, k]\!],\ \forall i \in [\![1, j]\!], \qquad 0 \leqslant a_i \leqslant i \leqslant k$$

donc, en exploitant à nouveau la positivité des sommants :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant p} a_i a_j a_k \leqslant \sum_{k=1}^{p} k a_k \sum_{j=1}^{k} j a_j \leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k\right)^2$$

Ainsi :

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\right)^3 \leqslant 6 \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k\right)^2$$

et donc, par croissance de la fonction racine cubique sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{p} a_k \leqslant 6^{1/3} \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k\right)^{2/3}$$

L'exposant $\frac{2}{3}$ est optimal dans les inégalités proposées puisque, en choisissant la valeur maximale autorisée pour chaque coefficient a_k (à savoir k) on a :

$$\sum_{k=1}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

et donc, pour tout $\alpha < \frac{2}{3}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} k\right) \left(\sum_{k=1}^{p} k^2\right)^{-\alpha} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{3^\alpha}{2} p^{2-3\alpha},$$

quantité qui tend vers $+\infty$ avec l'entier p puisque l'exposant $2 - 3\alpha$ est strictement positif.

Nous nous attachons maintenant à déterminer la plus petite constante vérifiant les inégalités pour tout entier naturel p non nul et pour tout élément de K_p. Dans le résultat qui suit, on se concentre sur la fonction f_p où l'entier p est fixé.

Théorème. *Soit p un entier naturel non nul fixé. En notant M_p le maximum de la fonction f_p sur le compact K_p, on a* :

$$M_p = f_p(1, 2, \ldots, p) = \frac{9p(p+1)}{2(2p+1)^2}$$

La plus petite constante C_p telle que :

$$\forall (a_1, \ldots, a_p) \in K_p, \qquad \sum_{k=1}^{p} a_k \leqslant C_p \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k \right)^{2/3}$$

est donc :

$$C_p = M_p^{1/3} = \left(\frac{9p(p+1)}{2(2p+1)^2} \right)^{1/3}$$

Avant de démontrer ce théorème, remarquons qu'il permet de répondre à la question **c)**.

Corollaire. *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout élément $(a_1, \ldots, a_p)$ de K_p, on a l'inégalité* :

$$\sum_{k=1}^{p} a_k \leqslant \frac{9^{1/3}}{2} \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k \right)^{2/3}$$

et la constante $\dfrac{9^{1/3}}{2}$ est optimale.

Démonstration du corollaire. La constante optimale que l'on cherche est (avec les notations du théorème précédent) :

$$C := \sup_{p \geqslant 1} C_p$$

Remarquons que la suite $(C_p)_{p \geqslant 1}$ est (strictement) croissante puisque :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad C_p = \left(\frac{9}{8} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{(2p+1)^2} \right)^{1/3} \tag{1}$$

On a donc :

$$C = \lim_{p \to +\infty} C_p = \left(\frac{9}{8} \right)^{1/3}$$

et le corollaire est démontré. □

Avant de démontrer le théorème qui repose sur un raisonnement par récurrence, faisons quelques remarques (seul le deuxième point sera utilisé dans la suite).

⋆ Le maximum de la fonction f_p est atteint sur la frontière du compact K_p. En effet, si f_p présentait un extremum local à l'intérieur de K_p (disons en $\boldsymbol{a} \in \overset{\circ}{K_p}$), alors la différentielle Df_p de f_p serait nulle en ce point (la fonction f_p est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $K_p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ comme quotient de fonctions polynomiales). Pour tout entier $j \in [\![1, p]\!]$, on aurait donc :

$$0 = \frac{\partial f_p}{\partial a_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{3n(\boldsymbol{a})^2 d(\boldsymbol{a})^2 - 2jn(\boldsymbol{a})^3 d(\boldsymbol{a})}{d(\boldsymbol{a})^4} = \frac{n(\boldsymbol{a})^2}{d(\boldsymbol{a})^3}(3d(\boldsymbol{a}) - 2jn(\boldsymbol{a}))$$

c'est-à-dire, puisque $\frac{n(\boldsymbol{a})^2}{d(\boldsymbol{a})^3} \neq 0$ (car $\boldsymbol{a} \neq 0_{\mathbb{R}^p}$) :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \qquad j = \frac{3d(\boldsymbol{a})}{2n(\boldsymbol{a})}$$

ce qui n'est pas possible si $p \geqslant 2$. Quant à la fonction f_1, elle atteint son maximum au point 1 (puisque $f_1 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$).

* Nous venons de calculer les dérivées partielles de f_p, ce qui sera utile dans la suite :

$$\forall \boldsymbol{a} \in K_p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}, \qquad \frac{\partial f_p}{\partial a_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{n(\boldsymbol{a})^2}{d(\boldsymbol{a})^3} \sum_{k=1}^{p} (3k-2j) a_k \tag{2}$$

En particulier, remarquons que pour toute suite non nulle $(a_2, \ldots, a_p) \in [0,2] \times \cdots \times [0,p]$, la fonction $\dfrac{\partial f_p}{\partial a_1}$ est strictement croissante sur $[0,1]$ (en effet, pour $j = 1$, la somme qui apparaît dans (2) est strictement positive). Le maximum de f_p est donc atteint en un point $(a_1, \ldots, a_p)$ de K_p tel que $a_1 = 1$.

* En notant M_p le maximum de la fonction f_p sur K_p, notons enfin que la suite $(M_p)_{p \geqslant 1}$ est croissante. Ceci provient des égalités :

$$\forall (a_1, \ldots, a_p) \in K_p, \qquad f_p(a_1, \ldots, a_p) = f_{p+1}(a_1, \ldots, a_p, 0)$$

qui impliquent l'inclusion :

$$\big\{ f_p(a_1, \ldots, a_p) \,\big|\, (a_1, \ldots, a_p) \in K_p \big\} \subset \big\{ f_{p+1}(a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}) \,\big|\, (a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}) \in K_{p+1} \big\}$$

puis l'inégalité $M_p \leqslant M_{p+1}$.

On pourra constater, dans l'étape 1 de la preuve du théorème qu'il nous reste à démontrer, que la suite $(M_p)_{p \geqslant 1}$ est en fait strictement croissante.

Démonstration du théorème. Tout d'abord, pour tout entier naturel p non nul, on a bien la deuxième égalité annoncée dans le théorème car :

$$\begin{aligned} f_p(1,2,\ldots,p) = \frac{n(1,2,\ldots,p)}{d(1,2,\ldots,p)} &= \frac{p^3(p+1)^3}{8} \times \frac{36}{p^2(p+1)^2(2p+1)^2} \\ &= \frac{9p(p+1)}{2(2p+1)^2} \end{aligned}$$

Pour montrer que $f_p(1,2,\ldots,p)$ est le maximum de la fonction f_p sur K_p, on utilise un raisonnement par récurrence sur l'entier $p \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord, la fonction $f_1 : a_1 \longmapsto a_1$, qui est croissante sur $K_1 = [0,1]$, admet bien pour maximum $f_1(1) = 1$. Soit maintenant $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons que :

$$M_p := \max_{(a_1,\ldots,a_p) \in K_p} f_p(a_1, \ldots, a_p) = f_p(1,2,\ldots,p)$$

Montrons que :

$$M_{p+1} := \max_{(a_1,\ldots,a_p,a_{p+1}) \in K_{p+1}} f_{p+1}(a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}) = f_{p+1}(1,2,\ldots,p,p+1)$$

Pour les étapes 1 et 2 qui suivent, $(a'_1, \ldots, a'_p, a'_{p+1})$ désigne un point de K_{p+1} en lequel la fonction f_{p+1} atteint son maximum :

$$M_{p+1} = f_{p+1}(a'_1, \ldots, a'_p, a'_{p+1})$$

Ces deux premières étapes consistent à montrer qu'on a nécessairement $a'_{p+1} = p+1$.

* **Étape 1 :** montrons que $a'_{p+1} > 0$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $a'_{p+1} = 0$. Alors, par définition de M_p :

$$M_{p+1} = f_{p+1}(a'_1, \ldots, a'_p, 0) = f_p(a'_1, \ldots, a'_p) \leqslant M_p$$

c'est-à-dire $M_{p+1} \leqslant f_p(1,2,\ldots,p)$ d'après l'hypothèse de récurrence. Ceci est absurde car on a aussi (par définition de M_{p+1}) :

$$M_{p+1} \geqslant f_{p+1}(1,2,\ldots,p+1)$$

et car la suite $(f_\ell(1,2,\ldots,\ell))_{\ell \geqslant 1}$ est strictement croissante. Ceci provient effectivement de (1) et du fait que $f_\ell(1,2,\ldots,\ell) = C_\ell^3$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$. On a donc bien $a'_{p+1} > 0$.

⋆ **Étape 2 :** montrons maintenant que cela implique que $a'_{p+1} = p+1$. Pour tout $x \in]0, p+1]$, on a :

$$\frac{\partial f_{p+1}}{\partial a_{p+1}}(a'_1, \dots, a'_p, x) = \underbrace{\frac{n(a'_1, \dots, a'_p, x)^2}{d(a'_1, \dots, a'_p, x)^3}}_{>0} \left((p+1)x + \sum_{k=1}^{p} (3k - 2(p+1)) a'_k \right)$$

donc le signe de cette dérivée partielle est celui de l'expression affine :

$$(p+1)x + \sum_{k=1}^{p} (3k - 2(p+1)) a'_k$$

En posant :

$$x_p = -\frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p} (3k - 2(p+1)) a'_k$$

on peut a priori envisager trois cas de figure.

— **Premier cas :** $x_p \leqslant 0$
La fonction $x \longmapsto f_{p+1}(a'_1, \dots, a'_p, x)$, notée g, est alors strictement croissante sur $[0, p+1]$. Le point $(a'_1, \dots, a'_p, a'_{p+1})$ étant un point où f_{p+1} atteint son maximum, la fonction g atteint également son maximum en a'_{p+1}, ce qui implique que $a'_{p+1} = p+1$.

— **Deuxième cas :** $x_p \geqslant p+1$
La fonction g est alors strictement décroissante sur $[0, p+1]$ et donc $a'_{p+1} = 0$, ce qui n'est pas possible d'après l'étape 1. Ce deuxième cas n'est donc pas possible.

— **Troisième cas :** $x_p \in]0, p+1[$
La fonction g décroît strictement sur $[0, x_p]$ et croît strictement $[x_p, p+1]$. Cette monotonie stricte et le fait que a'_{p+1} doive maximiser la fonction g impose que $a'_{p+1} \in \{0, p+1\}$. Or la valeur 0 est exclue d'après l'étape 1 donc $a'_{p+1} = p+1$.

⋆ **Étape 3 :** classons finalement dans l'ordre croissant les nombres :

$$f_{p+1}(a_1, a_2, \dots, a_p, p+1) \qquad \text{où} \qquad (a_1, \dots, a_p) \in K_p \tag{3}$$

Dans la remarque qui précède la démonstration du théorème, nous avons observé que si f_{p+1} atteint son maximum au point $(a_1, \dots, a_p, p+1)$, alors on a nécessairement $a_1 = 1$. Montrons alors que, pour tout $j \in [\![2, p]\!]$ et tout $(a_{j+1}, \dots, a_p) \in [0, j+1] \times \cdots \times [0, p]$, on a l'inégalité suivante :

$$f_{p+1}(1, 2, \dots, j-1, a_j, a_{j+1}, \dots, a_p, p+1) \leqslant f_{p+1}(1, 2, \dots, j-1, j, a_{j+1}, \dots, a_p, p+1) \tag{4}$$

Si (4) est établi, on pourra effectivement conclure que le plus grand nombre de la forme (3) est bien $f_{p+1}(1, \dots, p, p+1)$, ce qui achèvera la récurrence.
Fixons donc $j \in [\![2, p]\!]$ et $(a_{j+1}, \dots, a_p) \in [0, j+1] \times \cdots \times [0, p]$ et considérons la fonction :

$$\varphi : a_j \longmapsto f_{p+1}(1, 2, \dots, j-1, a_j, a_{j+1}, \dots, a_p, p+1)$$

La fonction φ est dérivable sur $[0, j]$ et, pour tout $a_j \in [0, j]$, on a :

$$\varphi'(a_j) = \frac{n(\boldsymbol{a})^2}{d(\boldsymbol{a})^3} \sum_{k=1}^{p+1} (3k - 2j) a_k \qquad \text{(on pose naturellement } a_k = k \text{ si } k \in [\![1, j-1]\!] \cup \{p+1\})$$

avec, d'après la relation de Chasles et la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{p+1} (3k - 2j) a_k = 3 \sum_{k=1}^{j-1} k^2 - 2j \sum_{k=1}^{j-1} k + \sum_{k=j}^{p} (3k - 2j) a_k + (3p + 3 - 2j)(p+1)$$

Or :

$$3\sum_{k=1}^{j-1}k^2 - 2j\sum_{k=1}^{j-1}k = \frac{(j-1)j(2j-1)}{2} - j^2(j-1) = -\frac{j(j-1)}{2}$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{p+1}(3k-2j)a_k = -\frac{j(j-1)}{2} + (3p+3-2j)(p+1) + \sum_{k=j}^{p}(3k-2j)a_k$$

La somme $\sum_{k=j}^{p}(3k-2j)a_k$ est positive (puisque tous les sommants sont positifs) et, comme j vaut au plus p, on a la minoration :

$$-\frac{j(j-1)}{2} + (3p+3-2j)(p+1) \geqslant -\frac{p(p-1)}{2} + (p+3)(p+1) \geqslant 0 \tag{5}$$

Finalement, la dérivée de φ est positive, donc φ est croissante sur $[0, j]$. Ainsi :

$$\forall a_j \in [0, j], \qquad \varphi(a_j) \leqslant \varphi(j)$$

et l'inégalité (4) est démontrée. On peut donc conclure que le maximum de la fonction f_{p+1} sur K_{p+1} est :

$$M_{p+1} = f_{p+1}(1, 2, \dots, p+1),$$

Ceci achève la récurrence et la démonstration du théorème. $\square$

Remarque : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $(1, 2, \dots, p)$ est l'unique point du compact K_p où la fonction f_p atteint son maximum. Il suffit en effet de constater que les inégalités (4) sont strictes si $a_j < j$ car la fonction φ est strictement croissante sur $[0, j]$ (puisque l'inégalité (5) est en fait stricte).