Question 924

Vincent Devinck

Question. On définit la suite d'intégrales $(I_n)_{n\geqslant 1}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t \cos\frac{t}{3}\cos\frac{t}{5}\cdots\cos\frac{t}{2n-1}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le sujet de centrale MP 2016 on déduit d'un raisonnement probabiliste les réponses aux questions suivantes :

a) Pour n entier compris entre 1 et 7, montrer que $I_n = I_1$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 7}$ est strictement croissante.

c) Montrer que la suite (I_n) converge.

Répondre aux questions proposées sans faire intervenir les probabilités.

(Ariel Dufetel)

Solution. En linéarisant le produit de cosinus qui apparaît dans l'intégrale I_n ($n \in \mathbb{N}^*$), nous allons voir que celle-ci s'exprime comme combinaison linéaire des intégrales suivantes :

$$J_s = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad (s \in \mathbb{R})$$

Nous commençons donc par calculer ces dernières intégrales. Nous verrons ensuite que le comportement de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ (pour $n \in [\![1,7]\!]$ puis pour $n \geqslant 7$) dépend essentiellement du signe des familles de sommes :

$$1+\sum_{k=2}^{n}\frac{\pm 1}{2k-1}$$

1. Calcul des intégrales J_s ($s \in \mathbb{R}$)

Le sujet de concours mentionné par l'auteur commence par le calcul de ces intégrales.

Lemme 1. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *est convergente et vaut* :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|$$

Démonstration. Nous nous contentons d'en donner les idées. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral, on montre que la fonction F est bien définie sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t))\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

En majorant l'intégrale définissant la fonction F, on trouve que F' et F tendent vers 0 en $+\infty$ et donc, en intégrant deux fois :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad F(x) = x \ln(x) - \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$

En montrant que F est continue sur $[0, +\infty[$, on trouve alors que $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$. On conclut à l'aide d'un changement de variable. □

Ce premier lemme va nous permettre de trouver une expression plus exploitable des intégrales I_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. Une autre expression des intégrales I_n ($n \in \mathbb{N}^*$)

On commence par linéariser le produit de cosinus apparaissant dans ces intégrales.

Lemme 2. *Pour tout entier naturel n non nul et pour tout n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de nombres réels, on a :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos(\alpha_k t) = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \cos\big((\varepsilon_1 \alpha_1 + \dots + \varepsilon_n \alpha_n) t\big)$$

Démonstration. On le démontre par récurrence sur l'entier n. Pour tout entier naturel n non nul, considérons la proposition $\mathcal{P}_n$:

$$\text{« } \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=1}^{n} \cos(\alpha_k t) = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \cos\big((\varepsilon_1 \alpha_1 + \dots + \varepsilon_n \alpha_n) t\big) \text{ »}$$

La fonction cosinus étant paire, la proposition $\mathcal{P}_1$ est clairement vraie (et la récurrence est initialisée). Soit maintenant n un entier naturel non nul tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $t \in \mathbb{R}$. La proposition $\mathcal{P}_n$ étant vraie, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \cos(\alpha_k t) &= \left(\prod_{k=1}^{n} \cos(\alpha_k t) \right) \cos(\alpha_{n+1} t) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \cos\big((\varepsilon_1 \alpha_1 + \dots + \varepsilon_n \alpha_n) t\big) \cos(\alpha_{n+1} t) \end{aligned}$$

et comme pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(x + y) + \cos(x - y)\big)$, il vient :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \cos(\alpha_k t) &= \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_{n+1} \in \{-1,1\}} \cos\big((\varepsilon_1 \alpha_1 + \dots + \varepsilon_{n+1} \alpha_{n+1}) t\big) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{-1,1\}^{n+1}} \cos\big((\varepsilon_1 \alpha_1 + \dots + \varepsilon_{n+1} \alpha_{n+1}) t\big) \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. □

Pour tout entier naturel k non nul, nous posons désormais $\alpha_k = \dfrac{1}{2k-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme 2, l'intégrande f_n de I_n est telle que :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \qquad f_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \frac{1-\cos\big((\varepsilon_1\alpha_1+\dots+\varepsilon_n\alpha_n)t\big)}{t^2}$$

Pour tout $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos\big((\varepsilon_1\alpha_1+\dots+\varepsilon_n\alpha_n)t\big)}{t^2}$ est (positive et) intégrable sur $]0,+\infty[$. Elle est en effet continue sur $]0,+\infty[$, vérifie les inégalités :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et est prolongeable par continuité en 0 car

$$f_n(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{(\varepsilon_1\alpha_1+\dots+\varepsilon_n\alpha_n)^2}{2}$$

Par somme, la fonction f_n est donc (positive et) intégrable sur $]0,+\infty[$ (l'intégrale I_n est donc bien définie). De plus, on a par linéarité de la somme :

$$I_n = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\big((\varepsilon_1\alpha_1+\dots+\varepsilon_n\alpha_n)t\big)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et finalement, d'après le lemme 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} |\varepsilon_1\alpha_1+\dots+\varepsilon_n\alpha_n| \tag{1}$$

Nous pouvons maintenant répondre analytiquement aux questions **a)** et **b)**.

3. Calcul des intégrales I_n pour $n \in [\![1,7]\!]$

Remarquons que le lemme 1 nous donne : $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Soit $n \in [\![1,7]\!]$. On utilise l'expression (1) de I_n précédemment obtenue :

$$I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}} \sum_{(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^{n-1}} \big(|\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\dots+\varepsilon_n\alpha_n| + |\alpha_1-\varepsilon_2\alpha_2-\dots-\varepsilon_n\alpha_n|\big)$$

Mais pour tout $(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^{n-1}$, on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2\alpha_2+\dots+\varepsilon_n\alpha_n| &\leqslant \alpha_2+\dots+\alpha_7 \\ &= \sum_{k=2}^{7} \frac{1}{2k-1} \\ &= \frac{43024}{45045} < 1 \end{aligned}$$

et comme $\alpha_1 = 1$, il vient $-\alpha_1 < \varepsilon_2\alpha_2+\dots+\varepsilon_n\alpha_n < \alpha_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} &|\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\dots+\varepsilon_n\alpha_n| + |\alpha_1-\varepsilon_2\alpha_2-\dots-\varepsilon_n\alpha_n| \\ &\qquad = (\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\dots+\varepsilon_n\alpha_n) + (\alpha_1-\varepsilon_2\alpha_2-\dots-\varepsilon_n\alpha_n) \\ &\qquad = 2\alpha_1 \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement (puisque $\alpha_1 = 1$) :

$$I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}} \sum_{(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^{n-1}} 2 = \frac{\pi}{2^n} \operatorname{Card}\left(\{-1,1\}^{n-1}\right) = \frac{\pi 2^{n-1}}{2^n} = \frac{\pi}{2}$$

On obtient donc que pour tout $n \in [\![1,7]\!]$, on a $I_n = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui répond à la question **a)**.

4. Stricte croissance de la suite $(I_n)_{n\geqslant 7}$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 7. D'après l'égalité (1), la différence $I_{n+1} - I_n$ vaut :

$$\frac{\pi}{2^{n+2}} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^{n}} \Big(|\varepsilon_1\alpha_1 + \cdots + \varepsilon_n\alpha_n + \alpha_{n+1}| + |\varepsilon_1\alpha_1 + \cdots + \varepsilon_n\alpha_n - \alpha_{n+1}| - 2\,|\varepsilon_1\alpha_1 + \cdots + \varepsilon_n\alpha_n| \Big)$$

Le lemme ci-dessous nous donne le signe des sommants.

Lemme 3. *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *posons* $f(x,y) = |x+y| + |x-y| - 2|x|$. *Alors* :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[, \qquad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geqslant y \\ 2(y-x) & \text{si } 0 \leqslant x < y \\ 2(x+y) & \text{si } -y < x \leqslant 0 \end{cases}$$

La démonstration est immédiate. Ce lemme nous dit en particulier que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[, \qquad f(x,y) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) > 0 \iff |x| < y$$

Soit $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$. Posons $x = \varepsilon_1\alpha_1 + \cdots + \varepsilon_n\alpha_n \in \mathbb{R}$ et $y = \alpha_{n+1} \in [0,+\infty[$. Alors :

$$|\varepsilon_1\alpha_1 + \cdots + \varepsilon_n\alpha_n + \alpha_{n+1}| + |\varepsilon_1\alpha_1 + \cdots + \varepsilon_n\alpha_n - \alpha_{n+1}| - 2\,|\varepsilon_1\alpha_1 + \cdots + \varepsilon_n\alpha_n| = f(x,y) \geqslant 0$$

Pour démontrer que $I_{n+1} - I_n > 0$, il suffit d'après le lemme d'établir l'existence d'un n-uplet $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $|\varepsilon_1\alpha_1 + \cdots + \varepsilon_n\alpha_n| < \alpha_{n+1}$. Ceci est une conséquence du résultat suivant.

Lemme 4. *Pour tout entier naturel n non nul, considérons l'ensemble* :

$$E_n = \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\alpha_k \right| \;\middle|\; (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n \right\}$$

et notons m_n son minimum. Alors

$$\forall n \geqslant 10, \qquad m_n \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{2}$$

Démonstration. Notons tout d'abord que pour tout entier naturel n non nul, le nombre m_n est bien défini car E_n est un ensemble fini non vide. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 10, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $m_n \leqslant \dfrac{\alpha_{n+1}}{2}$ ». Pour démontrer que ces propositions sont vraies, nous établissons dans l'hérédité que $\mathcal{P}_n$ entraîne $\mathcal{P}_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 10$ (ceci revient à prouver les propositions pour n pairs d'une part et pour n impairs d'autre part). Pour $n = 10$, on a

$$\left| 1 - \sum_{k=2}^{8} \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} \right| = \frac{227096}{14549535} \leqslant \frac{1}{2\times 21}$$

donc $m_{10} \leqslant \dfrac{\alpha_{11}}{2}$. Pour $n = 11$, on a

$$\left|1 - \sum_{k=2}^{9} \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21}\right| = \frac{285559}{14549535} \leqslant \frac{1}{2 \times 23}$$

et donc $m_{11} \leqslant \dfrac{\alpha_{12}}{2}$.

Soit maintenant n un entier naturel (pair ou impair) supérieur ou égal à 10 tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+2}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k\right| \leqslant \dfrac{\alpha_{n+1}}{2}$. Quitte à remplacer $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ par $(-\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_n)$, on peut supposer que $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k \geqslant 0$. Le nombre $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k - \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}$ appartient à E_{n+2} et :

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k - \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} \leqslant -\frac{\alpha_{n+1}}{2} + \alpha_{n+2}$$

Or :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} + \frac{\alpha_{n+3}}{2} &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(2n+5)} \\ &= \frac{4n^2 - 17}{2(2n+1)(2n+3)(2n+5)} > 0 \end{aligned}$$

puisque $n \geqslant 10 > 2$. Ensuite :

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_{n+1}}{2} + \alpha_{n+2} - \frac{\alpha_{n+3}}{2} &= -\frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2(2n+5)} \\ &= \frac{-4}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} < 0 \end{aligned}$$

Finalement, $\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k - \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}\right| \leqslant \dfrac{\alpha_{n+3}}{2}$. Le minimum m_{n+2} de l'ensemble E_{n+2} est nécessairement inférieur ou égal à $\dfrac{\alpha_{n+3}}{2}$. La proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie et le lemme est démontré. $\square$

Pour $n \geqslant 10$, il existe d'après le lemme 4 un n-uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k\right| \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{2} < \alpha_{n+1}$$

Il reste à traiter les cas $n \in \{7, 8, 9\}$. Si $n = 7$, on a :

$$\left|1 - \sum_{k=2}^{7} \frac{1}{2k-1}\right| = \frac{2021}{45045} < \underbrace{\frac{1}{15}}_{=\alpha_8}$$

puis, pour $n = 8$,

$$\left|1 - \sum_{k=2}^{8} \frac{1}{2k-1}\right| = \frac{982}{45045} < \underbrace{\frac{1}{17}}_{=\alpha_9}$$

et enfin, pour $n = 9$,

$$\left|1 - \sum_{k=2}^{8} \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{17}\right| = \frac{28351}{765765} < \underbrace{\frac{1}{19}}_{=\alpha_{10}}$$

Finalement, la suite $(I_n)_{n \geqslant 7}$ est strictement croissante.

5. Convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$

La suite $(I_n)_{n\geqslant 7}$ étant (strictement) croissante, il suffit d'établir qu'elle est majorée pour conclure quant à sa convergence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc, par croissance de l'intégrale (les intégrales mises en jeu sont convergentes) :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1$$

Il reste à majorer l'intégrale (convergente) $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ (uniformément en n). Pour tout nombre réel x, on a l'inégalité $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$ donc :

$$\forall t \in]0,1], \qquad f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^2}\left[1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\alpha_k^2 t^2}{2}\right)\right] \tag{2}$$

Nous utilisons l'inégalité suivante qui nous permettra de continuer la majoration de f_n sur $]0,1]$.

Lemme 5. *Pour tout entier naturel m non nul et pour toute famille $(a_1, \dots, a_m)$ de nombres réels positifs de l'intervalle $[0,1]$, on a la minoration* :

$$\prod_{k=1}^{m}(1 - a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m} a_k$$

Démonstration. On utilise un raisonnement par récurrence. Pour tout entier naturel m non nul, on considère la proposition :

$$\mathcal{P}_m : \text{« } \forall (a_1, \dots, a_m) \in [0,1]^m, \qquad \prod_{k=1}^{m}(1 - a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m} a_k \text{ »}$$

La proposition $\mathcal{P}_1$ est clairement vraie. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition $\mathcal{P}_m$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{m+1}$. Soit $(a_1, \dots, a_{m+1}) \in [0,1]^{m+1}$. Alors :

$$\prod_{k=1}^{m+1}(1 - a_k) = (1 - a_{m+1})\prod_{k=1}^{m}(1 - a_k) \geqslant (1 - a_{m+1})\left(1 - \sum_{k=1}^{m} a_k\right)$$

car $1 - a_{m+1} \geqslant 0$ et d'après l'hypothèse de récurrence. De plus :

$$(1 - a_{m+1})\left(1 - \sum_{k=1}^{m} a_k\right) = 1 - \sum_{k=1}^{m+1} a_k + a_{m+1}\sum_{k=1}^{m} a_k \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{m+1} a_k$$

car $a_{m+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k \geqslant 0$. La proposition $\mathcal{P}_{m+1}$ est donc vraie et le lemme est démontré. $\square$

Soit $t \in]0,1]$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\dfrac{\alpha_k^2 t^2}{2} = \dfrac{t^2}{2(2k-1)^2} \in [0,1]$ donc l'inégalité (2) devient en utilisant le lemme 5 :

$$f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^2}\left[1 - \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2 t^2}{2}\right)\right]$$

c'est-à-dire :

$$f_n(t) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

soit encore $f_n(t) \leqslant \dfrac{\pi^2}{12}$. Par croissance de l'intégrale, on trouve que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^2}{12}$. D'après la relation de Chasles, la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est donc majorée par $\dfrac{\pi^2}{12} + 1$. Finalement, la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, ce qui répond à la question **c)**.