Question 851

Vincent Devinck

Question. Étudier, dans les deux cas suivants, la nature de la série de terme général u_n.

1. $u_n = \dfrac{na - \lfloor na \rfloor}{n}$ où a est un réel strictement positif.
2. $u_n = \dfrac{\ln n - \lfloor \ln n \rfloor}{n}$.

Omar Sonebi

Solution. Si θ est un nombre réel, nous noterons $\{\theta\}$ sa partie fractionnaire définie par $\{\theta\} := \theta - \lfloor \theta \rfloor$. Pour tout entier naturel N non nul, nous noterons S_N la $N^{\text{ème}}$ somme partielle de la série étudiée.

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Nous montrons que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente si et seulement si a est un entier. Pour cela, nous distinguons trois cas.

Premier cas : a est un entier.

Pour tout entier naturel n non nul, $\lfloor an \rfloor = an$ donc la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est clairement convergente (de somme nulle).

Deuxième cas : a est un nombre rationnel (non entier).

Il existe deux entiers naturels non nuls (premiers entre eux) p et q tels que $a = \dfrac{p}{q}$. La série de terme général u_n étant à termes positifs nous avons, pour tout entier naturel N non nul,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n \geqslant \sum_{k=0}^{(N-1)/q} \frac{\frac{p}{q}(kq+1) - \left\lfloor \frac{p}{q}(kq+1) \right\rfloor}{kq+1}$$

Mais pour tout $k \in [\![0, (N-1)/q]\!]$,

$$\frac{p}{q}(kq+1) - \left\lfloor \frac{p}{q}(kq+1) \right\rfloor = kp + \frac{p}{q} - \left\lfloor kp + \frac{p}{q} \right\rfloor = \left\{ \frac{p}{q} \right\}$$

car kp est un entier. Il s'ensuit donc que

$$S_N \geqslant \left\{ \frac{p}{q} \right\} \sum_{k=0}^{(N-1)/q} \frac{1}{kq+1}$$

et donc la série de terme général u_n diverge puisque la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{kq+1}$ diverge et $\left\{ \dfrac{p}{q} \right\} > 0$.

Remarque. Nous pouvions aussi trouver un équivalent de S_N quand N tend vers $+\infty$ en conservant toutes les classes résiduelles modulo q. En effet, en séparant ces différentes classes, il vient

$$S_N = \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{(N-r)/q} \frac{\left\{\frac{p}{q}(kq+r)\right\}}{kq+r} = \sum_{r=0}^{q-1} \left\{\frac{p}{q} r\right\} \sum_{k=0}^{(N-r)/q} \frac{1}{kq+r} \tag{1}$$

puis nous estimons la somme intérieure à l'aide d'une *sommation par parties*, procédé que nous utiliserons plusieurs fois dans la suite et que nous présentons maintenant.

Lemme 1. *Pour tout entier $r \in [\![1, q-1]\!]$ et pour tout nombre réel positif X,*

$$s(X) := \sum_{k=0}^{X} \frac{1}{kq+r} = \frac{\ln(qX+r)}{q} + \mathcal{O}(1) \tag{2}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
s(X) &= \sum_{k=0}^{X} \left(q \int_k^X \frac{\mathrm{d}t}{(qt+r)^2} + \frac{1}{qX+r} \right) \\
&= q \sum_{k=0}^{X} \int_0^X \mathbf{1}_{[k,X]}(t) \frac{\mathrm{d}t}{(qt+r)^2} + \frac{\lfloor X \rfloor + 1}{qX+r} \\
&= q \int_0^X \left(\sum_{k=0}^{X} \mathbf{1}_{[k,X]}(t) \right) \frac{\mathrm{d}t}{(qt+r)^2} + \mathcal{O}(1) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Seuls les entiers k inférieurs ou égaux à t apportent une contribution non nulle dans la somme sous l'intégrale de (3) donc

$$\sum_{k=0}^{X} \frac{1}{kq+r} = q \int_0^X \left(\sum_{k=0}^{t} 1 \right) \frac{\mathrm{d}t}{(qt+r)^2} + \mathcal{O}(1)$$

En utilisant ensuite l'estimation grossière $\displaystyle\sum_{k=0}^{t} 1 = \lfloor t \rfloor + 1 = t + \mathcal{O}(1)$, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{X} \frac{1}{kq+r} &= \int_0^X \frac{qt}{(qt+r)^2}\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\Bigg(q \underbrace{\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{(qt+r)^2}}_{=\mathcal{O}(1)} + 1 \Bigg) \\
&= \frac{\ln(qX+r)}{q} + \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

puisque $\displaystyle\int_0^X \frac{r}{(qt+r)^2}\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}(1)$, ce qui démontre le lemme. □

Nous pouvons maintenant revenir à l'estimation de S_N en injectant l'estimation (2) dans (1) :

$$S_N = \left(\sum_{r=0}^{q-1} \left\{ \frac{p}{q} r \right\} \right) \frac{\ln N}{q} + \mathcal{O}(1)$$

Le lemme suivant permet de simplifier l'expression de la constante devant le logarithme.

Lemme 2. *Si p et q sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors*

$$\frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} \left\{ \frac{p}{q} r \right\} = \frac{q-1}{2q}$$

Démonstration. Pour tout $r \in [\![0, q-1]\!]$, il existe un entier r' tel que $\left\lfloor \frac{p}{q} r \right\rfloor = r'$ et notons que comme $0 \leqslant \frac{p}{q} r \leqslant p\left(1 - \frac{1}{q}\right)$, nous avons $r' \in [\![0, p-1]\!]$. Ainsi, toute partie fractionnaire $\left\{\frac{p}{q} r\right\}$ s'écrit

$$\left\{\frac{p}{q} r\right\} = \frac{p}{q} r - r' = \frac{pr - qr'}{q} \qquad \text{où } r' \in [\![0, p-1]\!]$$

Nous allons montrer que

$$\left\{ \frac{pr - qr'}{q} \,\middle|\, r \in [\![0, q-1]\!] \right\} = \left\{ \frac{\ell}{q} \,\middle|\, \ell \in [\![0, q-1]\!] \right\} \tag{4}$$

en raisonnant par l'absurde. Soient $(r, s) \in [\![0, q-1]\!]^2$ deux entiers distincts (par exemple $r > s$) tels que $\frac{p}{q} r - r' = \frac{p}{q} s - s'$ où $(r', s') \in [\![0, p-1]\!]^2$. Alors $p(r-s) = q(r'-s')$ et d'après le lemme de Gauss, q divise $r - s$ car p et q sont supposés premiers entre eux. Mais $0 < r - s \leqslant q - 1$ ce qui est absurde. Finalement, l'égalité (4) est démontrée. Nous pouvons achever la démonstration du lemme :

$$\frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} \left\{\frac{p}{q} r\right\} = \frac{1}{q} \sum_{\ell=0}^{q-1} \frac{\ell}{q} = \frac{(q-1)q}{2q^2} = \frac{q-1}{2q}$$

□

Le lemme 2 fournit l'équivalent cherché des sommes partielles :

$$S_N \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{q-1}{2q} \ln N$$

Troisième cas : a est irrationnel.

Dans ce cas, il est bien connu que la suite $(an)_{n \geqslant 1}$ est équidistribuée modulo 1. Ceci signifie que, pour tout sous-intervalle fixé de $[0, 1]$, la proportion des parties fractionnaires $\{an\}$ des termes de la suite, où $n \in [\![1, N]\!]$, est asymptotiquement proportionnel à la longueur de l'intervalle choisi. Plus précisément, une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est dite équidistribuée modulo 1 si pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a < b$, on a

$$\frac{\text{card}\big\{\{an\} \mid 1 \leqslant n \leqslant N\big\}}{N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} b - a$$

Rappelons le célèbre critère d'équidistribution de Weyl (voir par exemple [1]).

Théorème 1 (Critère d'équidistribution de Weyl, 1916)**.** *Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de nombres réels. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(a) *la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est équidistribuée modulo* 1 ;

(b) *pour toute fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ Riemann-intégrable sur* $[0, 1]$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\, dx$$

(c) *pour tout entier relatif ℓ non nul,*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x_n} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il n'est pas difficile de démontrer l'équidistribution modulo 1 de notre suite $(an)_{n\geqslant 1}$ en vérifiant que la condition (c) du théorème ci-dessus est satisfaite. Dans la suite, nous appliquerons simplement la condition (b) à la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$, ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{an\} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Nous écrirons plutôt cela dans la suite :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{na\} = 1 + \mathrm{o}(1) \tag{5}$$

Pour tout entier naturel N non nul, nous avons

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\{an\}\left(\int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{1}{N}\right) = \sum_{n=1}^{N}\{an\}\int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{an\}$$

Nous permutons ensuite les symboles $\sum\limits_{n=1}^{N}$ et $\int_n^N$ en utilisant le même procédé que dans le lemme 1 :

$$S_N = \int_1^N \left(\sum_{1\leqslant n\leqslant t}\{an\}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{an\}$$

En utilisant l'estimation (5), il vient alors

$$S_N = \int_1^N (1+\mathrm{o}(1))\frac{\mathrm{d}t}{t} + 1 + \mathrm{o}(1) = \ln N + \mathrm{o}(\ln N)$$

Il s'ensuit donc que $S_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln N$ puis que la série de terme général u_n est divergente.

2. Nous montrons que la série de terme général u_n est divergente. Soit N un entier naturel non nul. Alors $S_N = A - B$ où

$$A = \sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n} \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{n=1}^{N}\frac{\lfloor \ln n\rfloor}{n}$$

puis nous estimons A et B séparément. Tout d'abord,

$$A = \sum_{n=1}^{N}\int_1^n \frac{1-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^N \left(\sum_{t\leqslant n\leqslant N} 1\right)\frac{1-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

Pour tout $t\in[1,N]$, le nombre d'entiers n compris entre t et N est égal à

$$\sum_{t\leqslant n\leqslant N} 1 = N - t + \mathcal{O}(1)$$

En utilisant cette estimation dans (6), nous obtenons

$$\begin{aligned} A &= N\int_1^N \frac{1-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_1^N \frac{1-\ln t}{t}\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\int_1^N \frac{|1-\ln(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= N\times\frac{\ln N}{N} - \ln N + \frac{(\ln N)^2}{2} + \mathcal{O}\left(\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1-\ln t}{t^2} - \int_{\mathrm{e}}^N \frac{1-\ln t}{t^2}\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$A = \frac{(\ln N)^2}{2} + \mathcal{O}(1) \tag{7}$$

Pour estimer B, nous commençons par écrire que $\lfloor \ln N \rfloor = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ln N} 1$ puis nous permutons les deux sommes, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} B = \sum_{k=1}^{\ln N} \sum_{n=\mathrm{e}^k}^{N} \frac{1}{n} &= \sum_{k=1}^{\ln N} \sum_{n=\mathrm{e}^k}^{N} \left(\int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{1}{N} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{\ln N} \int_{\mathrm{e}^k}^{N} \left(\sum_{\mathrm{e}^k \leqslant n \leqslant t} 1 \right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}}_{:=C} + \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{k=1}^{\ln N} \sum_{n=\mathrm{e}^k}^{N} 1}_{:=D} \end{aligned}$$

et nous estimons les sommes C et D séparément. Le plus simple est le calcul de D :

$$D = \sum_{k=1}^{\ln N} \big(N - \mathrm{e}^k + \mathcal{O}(1) \big) = N \lfloor \ln N \rfloor - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} (\mathrm{e}^{\lfloor \ln N \rfloor} - 1) + \mathcal{O}(\ln N)$$

L'estimation grossière $\lfloor \ln N \rfloor = \ln N + \mathcal{O}(1)$ et le fait que

$$\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \times \frac{\mathrm{e}^{\lfloor \ln N \rfloor} - 1}{N} = \mathcal{O}(1)$$

fournissent, en divisant par N,

$$\frac{D}{N} = \ln N + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(\frac{\ln N}{N} \right) = \ln N + \mathcal{O}(1) \tag{8}$$

Nous nous occupons pour finir de la somme C. Pour tout entier naturel $k \in [\![1, \lfloor \ln N \rfloor]\!]$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{e}^k}^{N} \left(\sum_{\mathrm{e}^k \leqslant n \leqslant t} 1 \right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} &= \int_{\mathrm{e}^k}^{N} \big(t - \mathrm{e}^k + \mathcal{O}(1) \big) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \ln N - k - 1 + \frac{\mathrm{e}^k}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^k} - \frac{1}{N} \right) \end{aligned}$$

et donc, en sommant sur les entiers k inférieurs ou égaux à $\ln N$,

$$\begin{aligned} C = (\ln N) \lfloor \ln N \rfloor - \frac{\lfloor \ln N \rfloor (\lfloor \ln N \rfloor + 1)}{2} - \lfloor \ln N \rfloor + &\underbrace{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \times \frac{\mathrm{e}^{\lfloor \ln N \rfloor} - 1}{N}}_{=\mathcal{O}(1)} \\ &+ \mathcal{O}\Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{\ln N} (e^{-k} - N^{-1})}_{=\mathcal{O}(1)} \Bigg) \end{aligned}$$

En remplaçant $\lfloor \ln N \rfloor$ par $\ln N - \{\ln N\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} C &= \frac{(\ln N)^2}{2} - \frac{3 \ln N}{2} + \frac{3\{\ln N\} - \{\ln N\}^2}{2} + \mathcal{O}(1) \\ &= \frac{(\ln N)^2}{2} - \frac{3 \ln N}{2} + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \tag{9}$$

Nous remettons finalement (8) et (9) pour en déduire l'estimation suivante de B :

$$B = C + \frac{D}{N} = \frac{(\ln N)^2}{2} - \frac{\ln N}{2} + \mathcal{O}(1)$$

En soustrayant cette estimation à celle obtenue pour A en (7), nous trouvons l'estimation cherchée de S_N :

$$S_N = \frac{\ln N}{2} + \mathcal{O}(1) \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{\ln N}{2}$$

La série de terme général u_n est donc divergente.

Références

[1] A. GRANVILLE, Z. RUDNICK, *Equidistribution in number theory, an introduction,* Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on equidistribution in number theory, Montreal, Canada, July 11–22, 2005. NATO Science Series II : Mathematics, Physics and Chemistry 237.