Relations binaires

Exercice 1 On considère les relations $\mathscr{R}$ sur les ensembles E ci-dessous. Dans chaque cas, dire si la relation est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

1. $E = \mathbb{Z}$ et $\mathscr{R}$ définie par :
$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \qquad x \mathscr{R} y \iff x = -y$$
2. $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{R}$ définie par :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad x \mathscr{R} y \iff (\cos(x)^2 + \sin(y)^2 = 1)$$
3. $E = \mathbb{N}$ et $\mathscr{R}$ définie par :
$$x \mathscr{R} y \iff (\exists\, p, q \in \mathbb{N}^*,\ y = p x^q)$$

Quelles sont les relations qui sont des relations d'ordre ? des relations d'équivalence ?

1 Relations d'équivalence

Exercice 2 On définit une relation notée $\sim$ sur $\mathbb{C}$ en posant :
$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \qquad z \sim z' \iff |z| = |z'|$$
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$ et déterminer ses classes d'équivalence.

Exercice 3 On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x \sim y \iff \frac{\ln(x)}{y} = \frac{\ln(y)}{x}$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x.

Exercice 4 Soient E un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$. On définit une relation $\simeq$ sur $\mathscr{P}(E)$ en posant :
$$\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), \qquad X \simeq Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

1. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
2. Expliciter une application bijective de $\mathscr{P}(A)$ sur l'ensemble quotient $\mathscr{P}(E)/\simeq$.

Exercice 5 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On définit une relation $\equiv_f$ sur E en posant :
$$\forall x, y \in E, \qquad x \equiv_f y \iff f(x) = f(y)$$

1. Montrer que $\equiv_f$ est une relation d'équivalence et déterminer ses classes d'équivalence.
2. Justifier que l'application :
$$\overline{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} E/\equiv_f & \longrightarrow & F \\ \overline{x} & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$
est bien définie.
3. Montrer que l'application $\overline{f}$ est injective.

2 Relations d'ordre

Exercice 6 On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathscr{I} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ par :
$$\forall z, z' \in \mathscr{I}, \qquad z \preccurlyeq z' \iff \Big[|z| < |z'| \text{ ou } \big(|z| = |z'| \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z')\big)\Big]$$
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathscr{I}$.

Exercice 7 On définit sur $\mathbb{N}$ une relation $\preccurlyeq$ en posant :
$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \qquad x \preccurlyeq y \iff (\exists\, n \in \mathbb{N},\ y = x^n)$$
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cette relation est-elle totale ?

Exercice 8 On travaille dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ muni de la relation d'inclusion $\subset$.

1. L'ensemble $A = \{[\varepsilon, +\infty[\mid \varepsilon > 0\}$ est-il majoré ? minoré ? borné ? Possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
2. Même question pour l'ensemble $B = \left\{ \left[-\frac{1}{n}, n\right] \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 9 On travaille dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité notée $|$. L'ensemble :
$$X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
est-il majoré ? minoré ? borné ? Possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?