Généralités sur les fonctions

1 Calculs

Exercice 1 (propriétés algébriques de ln et exp) Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^3}\right) + \ln\left(\sqrt[4]{\mathrm{e}}\right) + \mathrm{e}^{-2\ln 2}$
2. $B = \exp\left(-\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{w}\right)}\right)^{\ln\left(\frac{1}{w^2}\right)}$
3. $C = \exp\left[x - \ln\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\right]$
4. $D = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \exp\left((x+1)^2 - \mathrm{e}^{2\ln(x)}\right)$
5. $E = \dfrac{\mathrm{e}^{3\ln(2x)-\ln(x)}\,\mathrm{e}^{1-3\ln(x)}}{x\,\mathrm{e}^{x-2}}$

Exercice 2 (dérivées successives) Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \ln(x)$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$
3. $k : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$

Indication : pour la fonction g, on pourra commencer par justifier l'existence de deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \qquad g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Exercice 3 (limites) Calculer les limites suivantes :

1. $\ell_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x + \ln(x)} - \sqrt{x}\right)$
2. $\ell_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\ln(x) + x}$
3. $\ell_3 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$
4. $\ell_4 = \lim\limits_{x\to0^+} x^x$
5. $\ell_5 = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x(x-1)}$
6. $\ell_6 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$
7. $\ell_7 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos(\mathrm{e}^x)}{x^2+1}$
8. $\ell_8 = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}$
9. $\ell_9 = \lim\limits_{x\to0^+} x^{(x^x)}$
10. $\ell_{10} = \lim\limits_{x\to0^+} (x^x)^x$

Exercice 4 (dérivées) Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la fonction dérivée :

1. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$
2. $g : x \longmapsto x\sqrt{x - \sqrt{x}}$
3. $h : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$
4. $k : x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^{-x} - 3}$

Exercice 5 (fonctions hyperboliques et formules d'addition) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a les identités suivantes :

1. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$;
2. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$;
3. $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$.

Exercice 6 (une équation) Résoudre l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7 (fonctions hyperboliques)

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel x non nul, on a $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{2\mathrm{sh}(x)}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right),$$

où $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$ désigne le produit $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

2 Autour du tableau de variations

Exercice 8 (sens de variation) Étudier le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

1. $f : x \longmapsto x\ln(x)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$;
2. $g : x \longmapsto \dfrac{x^4-1}{x^4+1}$ sur $I = \mathbb{R}$;

3. $h : x \longmapsto -x^7 + x^4 + x^2 + 3$ sur $I =]-\infty, 0]$;
4. $k : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ sur son domaine de définition.

Exercice 9 (inégalités) 1. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1+x) \leqslant x$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 10 (inégalité) Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \qquad x^x (1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

Exercice 11 (inégalité) Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a \leqslant b$. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ pour tout $x > 0$. En étudiant la fonction f, montrer que :

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leqslant \ln(2)^2.$$

Exercice 12 (inégalité) 1. Montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1, +\infty[, \qquad (1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$$

2. En déduire que pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geqslant (n+1)^\alpha,$$

où $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$ désigne le produit $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.

Exercice 13 (une fonction) Soit la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
   Indication : montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$.
4. Étudier les variations de f.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0.
6. Tracer la courbe représentative de f.

3 Divers

Exercice 14 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, f étant croissante sur $\mathbb{R}$ et g étant décroissante. Déterminer le sens de variation de $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (parité) Soient I un intervalle non vide et symétrique par rapport à 0 et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. On suppose que f est paire. Que dire de f' ?
2. On suppose que f est impaire. Que dire de f' ?
3. Ici, $I = \mathbb{R}$. On suppose que f est périodique. Que dire de f' ?

Exercice 16 1. Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut être ni croissante, ni décroissante.

2. Montrer que la somme de deux fonctions bornées est bornée.
3. Montrer que le produit de deux fonctions bornées est une fonction bornée.

Exercice 17 (fonction bornée ?) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{1+x^2} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la fonction f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ si $n \in \{0, 1, 2\}$.
2. Montrer que la fonction f_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ si $n \notin \{0, 1, 2\}$.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (f \circ f)(x) = x$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x$$

Exercice 19 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ une fonction strictement croissante. On fixe un élément x de l'intervalle I. Montrer que les assertions (1) et (2) suivantes sont équivalentes :

   (1) $(f \circ f)(x) = x$;

   (2) $f(x) = x$.

2. Pour $a > 0$ fixé, discuter l'équation $\mathrm{e}^{a\,\mathrm{e}^{ax}} = x$.