Nombres réels

1 Manipulation d'inégalités

Exercice 1 (racine carrée)
1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer que : $\sqrt{|x-y|} \geqslant \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|$.
3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $|x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$.

Exercice 2 Proposer un encadrement des quantités suivantes :

1. $\lambda = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + \sqrt{x+1} + 1}$ pour $x \in [-1, 1]$
2. $\beta = \dfrac{-x + y^2 + 1}{x^2 + y^2 - y}$ pour $x, y \in [1, 2]$

2 Équations, inéquations

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) = 0$
2. $|2x+3| - x - 2 = |2x-1|$
3. $|2x-3| < |3x+5|$
4. $\ln(|4x-1|) - \ln(|x+3|) < 0$
5. $\sqrt{(3x+5)^2} = x + 1$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+2} = x - 4$
2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}$
3. $\sqrt{x^2 - x - 2} = 3x + 2$
4. $\sqrt{x+1} < 2x - 3$
5. $\sqrt{x^2 - x - 20} \geqslant x$
6. $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{4x-1}$
7. $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x^2+1} > 0$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x+2}} < \mathrm{e}^2$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{x-3}} = \mathrm{e}$
3. $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(2x+11)$
4. $\ln(2x+1) - \ln(x-3) \leqslant 1$
5. $\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}} > 0$
6. $\ln(x^2 - \mathrm{e}^2) \leqslant 2$
7. $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^{-x} + 1) < 0$

3 Bornes supérieure et inférieure

Exercice 6 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Justifier que l'on peut définir la quantité notée $\sup_I(f)$ définie par :
$$\sup_I(f) = \sup(f(I))$$
2. Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^I$ deux fonctions majorées sur I. Comparer les quantités :
$$\sup_I(f) + \sup_I(g) \qquad \text{et} \qquad \sup_I(f+g)$$

Exercice 7 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Justifier, pour tout nombre réel x, l'existence du nombre réel :
$$d(x, A) = \inf\left\{|x-a| \,\middle|\, a \in A\right\},$$
appelé *distance de x à A*.
2. Soit $x \in A$. Calculer $d(x, A)$.
3. Montrer que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant |x-y|$$

Exercice 8
1. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un *un point fixe*, c'est-à-dire un nombre réel $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. On pose :
$$T = \left\{x \in [0,1] \,\middle|\, f(x) \leqslant x\right\}$$
   (a) Montrer que T possède une borne inférieure. *On la notera t.*
   (b) Monter que $f(t)$ minore T.
   (c) Montrer que $f(T) \subset T$.
   (d) En déduire que $f(t) = t$.
2. Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de $[0,1[$ dans lui-même ?

Exercice 9
1. On considère l'ensemble $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que A est une bornée de $\mathbb{R}$ et déterminer $\inf(A)$ et $\sup(A)$. L'ensemble A admet-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

2. Même question avec l'ensemble $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists\, y \in \mathbb{R}_+,\ x = \dfrac{y-1}{y+1} \right\}$.

Exercice 10 1. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $B \subset A$. Montrer que :

$$\inf(A) \leqslant \inf(B) \leqslant \sup(B) \leqslant \sup(A)$$

2. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (a,b) \in A \times B, \qquad a < b$$

Que dire des quantités $\inf(B)$ et $\sup(A)$?

3. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose :

$$A + B = \left\{ a + b \,\middle|\, (a,b) \in A \times B \right\}$$

Démontrer que $A + B$ admet une borne supérieure telle que :

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

4. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a < b$. Étudier les éventuelles bornes supérieure et inférieure de l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{x}{y} \,\middle|\, (x,y) \in [a,b]^2 \right\}$$

5. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose :

$$B = \left\{ |x-y| \,\middle|\, (x,y) \in A^2 \right\}$$

(a) Démontrer que B est non vide et bornée.

(b) Montrer que B admet un plus petit élément, dont on donnera la valeur.

(c) Démontrer que B admet une borne supérieure telle que :

$$\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$$

4 Partie entière

Exercice 11 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la quantité $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

2. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 12 On considère l'application suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x - \lfloor x \rfloor| \end{array} \right.$$

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3, 3]$.
2. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = f(x)$.
4. Démontrer que $\sup(f(\mathbb{R})) = 1$.

Exercice 13 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

En déduire $\left\lfloor \displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$.

Exercice 14 1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leqslant 1$$

Exercice 15 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor$
2. $\lfloor x + 3 \rfloor = \lfloor x - 1 \rfloor$

Exercice 16 1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \right\rfloor = n^2 + n$$

2. Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ est le carré d'un entier.