Nombres complexes

1 Formes algébriques et trigonométriques

Exercice 1 1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = (1-i\sqrt{3})^2 \qquad z_2 = \frac{1-4i}{1+5i} \qquad z_3 = \frac{1+i}{1-i}$$

$$z_4 = \frac{1-2i}{1+5i} + \frac{1+2i}{1-5i} \qquad z_5 = (2+i)^3 \qquad z_6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{5}}$$

$$z_7 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 \qquad z_8 = (a+ib)^3 + (a-ib)^3 \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer, en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$, les quantités suivantes :

$$\mathrm{Re}(iz), \qquad \mathrm{Im}(iz), \qquad \mathrm{Re}(z^2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z^2)$$

3. Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$z = \left(\frac{1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)}{2+2i}\right)^{10}$$

Exercice 2 Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes z suivants. On discutera suivant les valeurs des nombres réels α et β dans les questions 11. et 12.

1. $z = 7$
2. $z = -3$
3. $z = 3\,\mathrm{i}$
4. $z = -1 + i\sqrt{3}$
5. $z = 2 - 2\,\mathrm{i}$
6. $z = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}}$
7. $z = 1 + i\tan(\alpha)$ ($\alpha \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$)
8. $z = -4\,\mathrm{i}$
9. $z = 1 - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$
10. $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$
11. $z = \mathrm{e}^{i\alpha} + 1$
12. $z = \mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{i\beta}$
13. $z = (1-i)(1+i\sqrt{3})$
14. $z = \dfrac{1}{(1+i\sqrt{3})^4}$
15. $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ en élevant préalablement le nombre complexe au carré
16. $z = \dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}-1}{i\mathrm{e}^{i\beta}+1}$ où ici $(\alpha,\beta) \in]0,2\pi[\times \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ en justifiant d'abord que ce nombre complexe est bien défini

Exercice 3 Déterminer les entiers naturels n tels que :

1. $(1+i)^n \in \mathbb{R}$
2. $\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in i\mathbb{R}$

Exercice 4 On considère le nombre complexe $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer j^n et $(j^2)^n$ en fonction de n.
2. Exprimer sous la forme d'une somme la quantité :
$$(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$$
3. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Exercice 5 1. Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. On note j l'unique solution de l'équation précédente de partie imaginaire positive. Montrer que $j^3 = 1$. Résoudre plus généralement l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3. Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + bj$, où a et b sont des nombres réels :
$$z_1 = (1+j)^7, \qquad z_2 = (2-j)(3+2j), \qquad z_3 = \frac{j^9}{1+j} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{1}{1-j}$$
4. Pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, simplifier le produit $(u+v)(u+jv)(u+j^2v)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \left\{j, \bar{j}\right\}$ l'équation :
$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+z+z^2}\right) = 0$$

2 Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Exercice 6 *Les quatre questions sont indépendantes.*

1. Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $ac \neq -1$. Montrer que le nombre complexe $z = \dfrac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$ est un imaginaire pur.

2. Soient z et u des nombres complexes tels que $u \neq 1$. Montrer que :

$$\frac{z - u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \iff (|u| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R})$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que :

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff (|z| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R})$$

4. Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 deux à deux distincts. Montrer que :

$$\frac{b}{a}\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 7 On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Vérifier que :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \frac{1}{z} = \bar{z}$$

2. Montrer que la fonction $\varphi : z \longmapsto |1 + iz|^2 + |z+i|^2$ est constante sur $\mathbb{U}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, calculer $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$.
4. Montrer que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{U}, \qquad |a+b+c| = |ab+bc+ac|$$

5. Montrer que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{U}, \qquad zz' \neq -1 \Longrightarrow \frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$$

Exercice 8 1. On considère la fonction $f : z \longmapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ tels que :

(a) $|f(z)| = 1$;

(b) $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$.

2. On considère la fonction $g : z \longmapsto \dfrac{2z-i}{z-2i}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ tels que :

(a) $g(z) \in \mathbb{R}$;

(b) $|g(z)| = 1$.

3 Équations

Exercice 9 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + \bar{z} = |z|$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z+1| = |z| + 1$.

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes d'inconnues $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 + (4-3i)z = 2 + 8i$
2. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$
3. $z^2 + 5z + 7 - i = 0$
3. $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$
5. $2z^2 + (8-5i)z + (4-13i) = 0$

Exercice 11 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y=3i \\ xy=-1-3i \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y=1+i \\ xy=13i \end{cases}$
4. $\begin{cases} x+y=-a \\ xy=a^2 \end{cases}$ (où $a \in \mathbb{C}$)

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (d'inconnue z) :

1. $z^3 = 1$
2. $z^4 = 16\,\mathrm{i}$
3. $z^5 = \mathrm{i} + 1$
4. $z^3 = 4\,\overline{z}$
5. $z^4 - 2\cos(2\theta)z^2 + 1 = 0$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)
6. $\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^2 + \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} + 1 = 0$
7. $z^n = 1$ où n est un entier naturel non nul (*généralisation de la question* 1.)

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre les équations suivantes d'inconnues $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^4 = 4 + 4i$
2. $(z-1)^3 = 8i$
3. $z^n + 1 = 0$
4. $z^n = \bar{z}$
5. $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$
2. $z^6 - 2z^3\cos(\varphi) + 1 = 0$, où $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 On note $(*)$ l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ solution de $(*)$, on a $x^2 + x - 1 = 0$ où $x = z + \dfrac{1}{z}$.

2. Montrer que $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$ est solution de $(*)$.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

4 Sommes trigonométriques

Exercice 16 Soient $(a,\theta)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)^2 \qquad \text{et} \qquad T=\sum_{k=0}^{n}\cos(a+k\theta)$$

Exercice 17 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \cos(2x)^2\sin(x)$
2. $g : x \longmapsto \cos(x)^2\sin(x)^4$
3. $h : x \longmapsto \cos(3x)^3$

Exercice 18 1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

2. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^2$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 19 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produit suivants :

$$S_1=\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega,\quad S_2=\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}(1+\omega)^n,\quad S_3=\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}|\omega-1| \quad \text{et} \quad P=\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega$$

Exercice 20 Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

5 Exponentielle complexe

Exercice 21 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^z=1+i$
2. $\mathrm{e}^z=-5-12i$
3. $\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}=1$
4. $\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}=2i$
5. $\mathrm{e}^z+2\,\mathrm{e}^{-z}=i$

6 Géométrie

Exercice 22 Soit $z\in\mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur z :

1. les points d'affixes 1, z et z^2 sont-ils alignés ?
2. les vecteurs d'affixes z et $\bar{z}$ sont-ils orthogonaux ?
3. les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ sont-ils situés sur un même cercle de centre 0 ?

Exercice 23 Soit $u,v\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que :
$$|u+v|^2+|u-v|^2=2\big(|u|^2+|v|^2\big)$$
Quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?
2. On suppose que $|u|\leqslant 1$ et $|v|\leqslant 1$. Montrer que :
$$\exists\varepsilon\in\{-1,1\},\qquad |u+\varepsilon v|\leqslant 1$$

Exercice 24 Représenter géométriquement les ensembles suivants :

1. $A=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)\geqslant 0\right\}$
2. $B=\left\{a+r\,\mathrm{e}^{it}\,\middle|\,t\in[0,\pi]\right\}$ $(a\in\mathbb{C},\ r>0)$
3. $C=\left\{a+\lambda\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\middle|\,\lambda>0\right\}$ $(a\in\mathbb{C},\ \theta\in\mathbb{R})$
4. $D=\left\{z\in\mathbb{C}^*\,\middle|\,\arg(z)\equiv\theta\ [2\pi]\right\}$ $(\theta\in\mathbb{R})$
5. $E=\left\{z\in\mathbb{C}^*\,\middle|\,2\arg(z)\equiv\theta\ [2\pi]\right\}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

Exercice 25 1. Caractériser géométriquement les applications suivantes (c'est-à-dire préciser de quel type de similitude du plan il s'agit et déterminer les invariants : vecteur, centre, rapport, *etc*) :

(a) $a : z\longmapsto iz+1$
(b) $b : z\longmapsto 3z-2$
(c) $c : z\longmapsto z+3-5i$
(d) $d : z\longmapsto 2(1+i)z-7-4i$

2. Déterminer une expression explicite de la rotation de centre d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.
3. On note r la rotation de centre d'affixe $2+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Soit encore s la symétrie centrale de centre d'affixe $1-i$. Caractériser géométriquement $s\circ r$.

Exercice 26 On note $\mathbb{U}$ le cercle unité. Quelle est l'image de $\mathbb{U}\setminus\{1\}$ par l'application $f : z\longmapsto \frac{1}{1-z}$.