Étudier la nature d'une série

Nature ? Étudier la nature d'une série, c'est chercher si la série est convergente (dans ce cas, il est licite de parler de la somme de la série) ou si elle est divergente (dans ce cas, la série n'admet pas de somme).

Série convergente ? divergente ? Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série. Notons $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

Deux alternatives sont possibles :

- ⋆ ou bien la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (*i.e.* $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \ell \in \mathbb{R}$) : alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente de somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$$
- ⋆ ou bien $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (*i.e.* n'admet pas de limite ou $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$ ou $-\infty$) : la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est alors divergente [1]

Divergence grossière ? Si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge (grossièrement). [2]

Comment étudier la nature d'une série ?

1 – Suis-je confronté(e) à une divergence grossière ?

Je regarde si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergente de limite 0.
- — Si ce n'est pas le cas, la série diverge grossièrement.
- — Sinon, je dois utiliser une autre méthode.

Par exemple, $\sum_{n\geqslant 0} \cos(n)$ diverge grossièrement (puisque la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite [3] quand n tend vers $+\infty$).

2 – J'utilise la définition

Je fixe $n \in \mathbb{N}$ et je calcule S_n. Je regarde ensuite si la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (*c'est ce que l'on fait par exemple pour une série télescopique ou quand on voit apparaître des expressions qui font penser aux séries usuelles*).
L'avantage de cette méthode, c'est qu'elle donne directement la valeur de la somme de la série en cas de convergence (il s'agit en effet de $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$ qu'on aura calculée).

3 – J'utilise l'un des deux théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs [4] [5]

C'est ce qu'il faudrait faire par exemple [6] pour la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$.
L'inconvénient de cette méthode, c'est qu'elle ne permet pas de calculer la somme de la série.

4 – J'utilise le critère de convergence absolue

Considérons par exemple la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$. On peut montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Le théorème de majoration (et le fait que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge) permet de montrer que la série évoquée converge absolument ; elle est donc convergente.

1. et il n'est pas question de parler de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$!
2. La réciproque est fausse : la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$) bien que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
3. donc, en particulier, cette suite ne converge pas vers 0
4. *i.e.* : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$
5. si la série est à termes positifs
6. On majore le terme général par $\frac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Les séries usuelles

Nom	Expression	Nature	Somme
Séries de Riemann (de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$)	$\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$	converge si et seulement si $\alpha > 1$	$\frac{\pi^2}{6}$ pour $\alpha = 2$ (culturel)
Série géométrique (de raison $q \in \mathbb{C}$)	$\sum\limits_{n \geqslant 0} q^n$	converge si et seulement si $\lvert q \rvert < 1$	$\frac{1}{1-q}$
Série exponentielle (de paramètre $z \in \mathbb{C}$)	$\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$	converge (quelle que soit la valeur de $z \in \mathbb{C}$)	e^z
Série télescopique*	$\sum\limits_{n \geqslant 0} (a_n - a_{n+1})$	converge si et seulement si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge	$a_0 - \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ en cas de convergence

*Pour une série télescopique, on calculera directement les sommes partielles pour étudier la nature et trouver la somme de la série (en cas de convergence).

Théorème (de comparaison pour les séries à termes positifs) Soient $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que :

$$(\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies 0 \leqslant u_n \leqslant v_n) \qquad \text{ou que} \qquad u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$$

- ⋆ Si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ est convergente, alors $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge.
- ⋆ Si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ est divergente, alors $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ diverge.

Théorème (sur les séries alternées) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive, décroissante de limite 0. Alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ est convergente.

Théorème (critère de convergence absolue) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \lvert u_n \rvert$ est convergente, alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

Théorème (de comparaison) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n) \qquad (\text{ou que } u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}(v_n))$$

et que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ est convergente. Alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ est absolument convergente (et donc convergente).