Limites et continuité

1 Limites

Exercice 1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$
2. $\lim_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
3. $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$
4. $\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$
5. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}(x)+x^2}$
8. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}(x)+x^2}$
9. $\lim_{x\to 1} \ln(x)\ln(\ln(x))$
10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\mathrm{e}^{\sin(x)}}{\sqrt{x^2+1}}$
11. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
12. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
13. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x-1}$
14. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Exercice 2 Montrer que les fonctions suivantes n'admettent pas de limite au point indiqué :

1. $x \longmapsto \sin(\cos(x))$ en $+\infty$;
2. $x \longmapsto \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)$ en 0 ;
3. $x \longmapsto \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$;
4. $x \longmapsto \cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$ en 0.

Exercice 3 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction périodique et admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 4 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\qquad f(x+y)=f(x)+f(y)\qquad\text{et}\qquad f(xy)=f(x)f(y)$$

1. Déterminer les valeurs possibles de $f(1)$. Conclure dans le cas où $f(1)=0$.
2. On suppose maintenant que $f(1)\neq 0$.
   (a) Montrer que $f|_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.
   (b) Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$ puis que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 5 Soit $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante, non identiquement nulle, et telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,\qquad f(xy)=f(x)+f(y)$$

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Que vaut $\lim_{x\to 0^+} f(x)$?
2. Résoudre l'équation $f(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Continuité, prolongement par continuité

Exercice 6 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, le domaine de continuité, ainsi que les éventuels prolongements par continuité.

1. $x\longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $x\longmapsto \lfloor x\rfloor+\left(x-\lfloor x\rfloor\right)^2$
3. $x\longmapsto x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
4. $x\longmapsto \frac{x^3+3x+2}{x^2-1}$

Exercice 7 Soit $f:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que :

- ⋆ f est croissante sur $]0,+\infty[$;
- ⋆ $x\longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 8 Soit $f,g\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f|_{\mathbb{Q}}=g|_{\mathbb{Q}}$. Montrer que $f=g$.

Exercice 9 Soit $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne, c'est-à-dire telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\qquad |f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble E des points fixes de f est un intervalle.

3 Théorèmes autour de la continuité

Exercice 10 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

1. On suppose que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)^2 = 1$$
Déterminer f.
2. (a) Montrer que si la fonction $|f|$ est constante, alors f l'est également.
   (b) Qu'en est-il si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$?

Exercice 11 Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Exercice 12 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point fixe de f si $f(x_0) = x_0$. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. On suppose que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer que f en possède un aussi.
2. On suppose que f est décroissante. Montrer que f possède un et un seul point fixe.

Exercice 13 Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que f possède un point fixe dans chacun des deux cas suivants :

1. $f([a,b]) \subset [a,b]$;
2. $[a,b] \subset f([a,b])$.

Exercice 14 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que f admet une limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que :
$$\forall x \in [a,b], \qquad f(x) < g(x)$$
Montrer que :
$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [a,b], \qquad f(x) + \lambda \leqslant g(x)$$

Exercice 17 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}(]a,b[,\mathbb{R})$ une fonction telle que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ et sont égales. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 19 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère l'équation $(E) : x^n - x - 1 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $\left]1, 1+\dfrac{1}{n}\right[$ (que l'on note x_n).
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 1.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a $n\ln(x_n) = \ln(1+x_n)$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln(2)}(x_n - 1) = 1$.

4 Équations fonctionnelles

Exercice 20 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = f(x)$$

Exercice 21 Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Exercice 22

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.
Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = f(x)\cos(x)$$

Exercice 23 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
2. Déterminer f dans le cas où $f(0) = 0$.
3. On suppose que $f(0) \neq 0$.
   (a) Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) > 0$.
   (c) Conclure que :
$$\exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{ax}$$