Intégration sur un segment

1 Généralités

Exercice 1 (inégalité de la moyenne) Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$. Démontrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\max_{t\in[a,b]} |f(t)|\right)(b-a)$$

Exercice 2 (égalité de la moyenne) Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$.

1. Montrer que, si f ne s'annule pas sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.
2. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$. Montrer que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ si et seulement si f est de signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2 Calculs

Exercice 5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : t \in [0,1] \longmapsto \lfloor nt \rfloor$. Montrer que f est une fonction en escalier sur $[0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_{[0,1]} f$.

Exercice 6 Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 x(x - \lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \displaystyle\int_0^1 \min(t, 1-2t^2)\,\mathrm{d}t$
2. $B = \displaystyle\int_0^1 |3t-1|\,\mathrm{d}t$
3. $C = \displaystyle\int_{-1}^1 x|x|\,\mathrm{d}x$
4. $D = \displaystyle\int_0^4 \sin\left(\frac{\lfloor x \rfloor \pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x$
5. $E = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$
6. $F = \displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)^2\,\mathrm{d}x$
7. $G = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2\sin(3x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 8 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ en posant $x = \tan(t)$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ en posant $t = \sqrt{x+1}$
3. $h : t \longmapsto \dfrac{1}{t-z}$ où $z \in \mathbb{C}$
4. $j : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+5}$
5. $k : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)^5}$

Exercice 9 On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(t)^2}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(t)^2}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $I + J$ en posant $x = \tan(t)$.
2. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 10 Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$\mathrm{I}(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$$

1. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{I}(0,q)$.
2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Trouver une relation entre $\mathrm{I}(p,q)$ et $\mathrm{I}(p-1,q+1)$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(p,q)$ dans le cas général.

Exercice 11 En utilisant le changement de variable $x = \cos(t)$, calculer l'intégrale :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 12 On pose :

$$I = \int_0^\pi \frac{t}{2+\sin(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)}$$

1. Trouver une relation simple entre I et J en effectuant le changement de variable $t = \pi - u$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)}$$

   (a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $x \in]-\pi,\pi[$, calculer $F(x)$.
   (c) En déduire les valeurs de J et I.

3 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 13 On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Quel est le signe de f ?
3. Prolonger f par continuité où cela est possible.
4. Montrer que f est dérivable et étudier les variations de f. Préciser également la limite de f en $+\infty$.
5. Étudier la convexité de f et représenter graphiquement f.

Exercice 14 Soit $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f'' + f = g$$

3. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

Exercice 15

1. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |\cos(t) - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}$$

2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2f(1) - 3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

4 Suites d'intégrales

Exercice 17 (lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, où $a < b$.

1. Démontrer que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. En déduire que

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 18 Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 19 Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^{2n+2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

1. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $u_n + u_{n+1}$.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$$

4. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

5 Formules de Taylor

Exercice 20 Montrer que :

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 21 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad \text{et} \qquad \cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Exercice 22 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que les fonctions f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On pose alors :

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{|f(x)| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{et} \qquad \|f''\|_\infty = \sup\left\{|f''(x)| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$$

1. Montrer que pour tous $x, h \in \mathbb{R}$, on a les inégalités :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$$

et :

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$$

2. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{h} + \frac{h}{2}\|f''\|_\infty$$

3. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2\|f\|_\infty \, \|f'\|_\infty}$$

Exercice 23 1. Déterminer (en justifiant leur existence) les dérivées successives de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$.

2. En déduire que :

$$\forall x \in [0,1], \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x)$$

6 Sommes de Riemann

Exercice 24 1. Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termes généraux suivants :

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$

(b) $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$

(c) $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}$

2. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, des expressions suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ (où $\alpha > 0$)

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2$

Exercice 25 Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite $\exp\left(\displaystyle\int_{[0,1]} f\right)$.

Exercice 26 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$$

En déduire, pour tout $r \in]1, +\infty[$, la valeur de l'intégrale :

$$I_r = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|1 - r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right|\right)\,\mathrm{d}\theta$$