

FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1 1. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$(a) \frac{X}{X^4 - 1}$$

$$(b) \frac{X}{(X+1)^2(2X+1)}$$

$$(c) \frac{1}{(X^2+4)(X+2)^2}$$

$$(d) \frac{X^4}{X^2+2X+5}$$

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) I = \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(t+1)(t+2)} dt$$

$$(b) J = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^3+1}$$

$$(c) K = \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2(t^2-2t+2)}$$

$$(d) L = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2(t+1)}$$

Exercice 2 Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \frac{1}{X}$.

Exercice 3 Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F_{m,n} = \frac{X^m}{(X-1)^n}$.

Indication : $X = (X-1) + 1$.

Exercice 4 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. En utilisant la question précédente, calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$.

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On suppose que P est scindé sur \mathbb{R} .

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

2. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x)^2 \geq P(x)P''(x),$$

avec égalité si et seulement si x est racine multiple de P .

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de :

$$F_n = \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$$

Exercice 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

$$1. I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t)} \text{ en posant } u = \cos(t);$$

$$2. J = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{4 - \cos(t)^2} dt \text{ en posant } u = \cos(t);$$

$$3. K = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos(t)^3} \text{ en posant } u = \sin(t).$$

Exercice 10 Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$$

1. Exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire, pour tout entier naturel n , l'existence de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$

et la calculer. Cette limite est notée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$.