# Familles sommables

## 1 Études de sommabilité, calculs de sommes

**Exercice 1** Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $u = (x)_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ;
2. $v = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$ ;
3. $w = (a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ où $a_{n,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2-p^2} & \text{si } n \neq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

**Exercice 2** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_{m,n} = \dfrac{1}{(m+n)^\alpha}$. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 3** Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} a_p$ soit absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et :

$$\forall (n,p) \in I, \qquad u_{n,p} = \begin{cases} \dfrac{p}{n(n+1)} a_p & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

**Exercice 4** Démontrer l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

**Exercice 5** Calculer les sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\,!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})^2} \frac{1}{p^q}$$

**Exercice 6** Étudier la sommabilité de la famille $u = \left(\dfrac{(-1)^n}{nk(k+1)}\right)_{\substack{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ n\leqslant k}}$ est sommable et calculer sa somme le cas échéant.

**Exercice 7**
1. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n$ tend vers $+\infty$, pour tout $\alpha > 1$.
2. En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

**Exercice 8** Soit $x \in ]-1,1[$.
1. Montrer que la famille $\left(x^{k\ell}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.
2. En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n,$$
où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de $n$.

## 2 Produit de Cauchy

**Exercice 9** Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer que :
1. si $a \neq b$, alors $\dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$ ;
2. si $a = b$, alors $\dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n$.

**Exercice 10** Pour tout entier naturel $n$, on pose $w_n = 2^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k\,!}$.
1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.