Espaces préhilbertiens réels

1 Produits scalaires

Exercice 1 Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires sur E.

1. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts,
$$\Psi : (P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$$
2. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,
$$(P, Q) \longmapsto \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$$
3. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$,
$$(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$
4. sur $E = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,
$$(f, g) \longmapsto \langle f, g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$$

2 Inégalités

Exercice 2 On définit, sur l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ par :
$$(f, g) \longmapsto \langle f, g\rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que cette application définit un produit scalaire sur E.
2. Établir que :
$$\forall f \in E, \qquad \left(f(1) + \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 2\left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 3 (inégalité de Ptolémée) Soit E un espace euclidien. On considère l'application :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \longrightarrow & E \setminus \{0\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|^2} \end{array} \right.$$

1. Vérifier que :
$$\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \qquad \|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\,\|y\|}$$
2. Soit $a, b, c, d \in E$. Montrer que :
$$\|a - c\|\,\|b - d\| \leqslant \|a - b\|\,\|c - d\| + \|b - c\|\,\|a - d\|$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. Montrer que :
$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant n\left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$$
2. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$$
3. Montrer que, si $n \geqslant 2$, alors :
$$\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}$$

Exercice 5 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que :
$$\int_a^b f(u)^2\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'(u)^2\,\mathrm{d}u$$

3 Bases orthonormales

Exercice 6 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k\,!)^2}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner sans calcul une base orthonormale de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot, \rangle)$.

Exercice 7 Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs non nuls de E tels que :

$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Montrer que :
$$\forall x, y \in E, \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$$
2. En déduire que :
$$\forall x \in E, \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$
3. Établir que $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 8 Orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt les familles suivantes :

1. $\mathscr{F} = \big((0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\big)$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$;
2. $\mathscr{G} = \big(t \longmapsto 1, t \longmapsto t, t \longmapsto |t|\big)$ dans $\mathscr{C}([-1,1], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application :

$$(P, Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = (1 - X^2)^n = (1+X)^n(1-X)^n$. On considère dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in E, \qquad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que :
$$Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$$
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = Q_k^{(k)}$. Montrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de E.

4 Orthogonalité

Exercice 11 Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall f, g \in E, \qquad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose $F = \big\{ f \in E \,\big|\, f(0) = 0 \big\}$.

1. Soit $f \in F^\perp$. Montrer que $f^2 \in F^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
3. L'espace vectoriel E est-il de dimension finie ?

Exercice 12 Soient E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

1. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp$.

Exercice 13 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que :
$$F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$$
et que, si F et G sont de dimension finie, alors :
$$G^\perp \subset F^\perp \Longrightarrow F \subset G$$
2. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et que, si E est de dimension finie, alors :
$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

5 Projection orthogonale

Exercice 14 Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E. On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée de E. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$ dans $\mathscr{B}$.

Exercice 15 (caractérisation des projections orthogonales) Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et p une projection sur E. Établir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;
2. $\forall x, y \in E,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$;
3. $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 16 On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 17 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\langle aX^2 + bX + c, \alpha X^2 + \beta X + \gamma\rangle = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

On note F le sous-espace vectoriel de E des polynômes s'annulant en 1.

1. Déterminer une base de F.
2. Calculer $\delta = \inf\limits_{P \in F} \|X - P\|$.

Exercice 18 Calculer le minimum de la fonction :

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^\pi \big(\sin(x) - ax^2 - bx\big)^2 \,\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

6 Divers

Exercice 19 Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \qquad \langle u(x), x\rangle = 0$$

Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(u)^\perp = \mathrm{Im}(u)$$

Exercice 20 Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \qquad \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$$