Équations différentielles

1 Primitives et calcul intégral

Exercice 1 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-3x^2}$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^4}$
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$
6. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
7. $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$
8. $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(x)^2}$
9. $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}+x}$
10. $x \longmapsto \sqrt{x^4+x^2}$

Exercice 2 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \cos(x)^3\sin(x)^2$
2. $x \longmapsto \sin(2x)^2\cos(x)$

Exercice 3 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2-4x+3}$
3. $x \longmapsto \dfrac{4}{x^2-6x+9}$
4. $x \longmapsto \dfrac{2}{x^2-3x+2}$

Exercice 4 Calculer :

1. l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$;
2. une primitive de $f : x \longmapsto \sin(x)\,\mathrm{sh}(x)$.

Exercice 5 (intégration par parties)

1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
   (a) $x \longmapsto \arctan(x)$
   (b) $x \longmapsto \dfrac{x}{\cos(x)^2}$
   (c) $x \longmapsto \arcsin(x)$
   (d) $x \longmapsto x\,\mathrm{ch}(x)$
2. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$
   (b) $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$
   (c) $K = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)^2\,\mathrm{d}t$
   (d) $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)^2\,\mathrm{d}x$

Exercice 6 (changement de variable) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}}$ en posant $t=\sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}$;
2. $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $t=\sqrt{1+x}$;
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ en posant $t=\mathrm{e}^{x}$;
4. $x \longmapsto \sin(\ln(x))$ en posant $t=\ln(x)$;
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\tan(x)}$ en posant $t=\tan(x)$;
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ en posant $t=\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 7 (changement de variable) Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t=\sin(\theta)$;
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)}$ en posant $x=\sin(\theta)$;
3. $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}$ en posant $x=\sqrt{t^2+t+1}-t$;
4. $L = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ en posant $u=\dfrac{1}{t}$.

2 Équations différentielles du premier ordre

Exercice 8 Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $x\ln(x)y'-y=2x^2\ln(x)^2$ sur $]0,1[$;
2. $xy'-y=x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $y(1)=1$;
3. $\sqrt{1-x^2}y'-y=1$ sur $]-1,1[$;
4. $y'+x^2y+x^2=0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$;
5. $y'+\mathrm{th}(x)y=\mathrm{th}(x)$ sur $\mathbb{R}$;
6. $(x-1)y'+y=x$ sur $]1,+\infty[$ avec $y(2)=2$;
7. $3xy'-4y=x$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
8. $xy'-2y=x^3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $4y' + y = \cos(x)$ et $y(0) = 0$;
2. $y' - y = \operatorname{sh}(x)$ et $y(0) = 1$;
3. $y' - 3y = 2\,\mathrm{e}^{3x} - \sin(x)\,\mathrm{e}^{x}$;
4. $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x} + 6$;
5. $y' - y = \cos(x) + \sin(2x)\,\mathrm{e}^{x}$ et $y(0) = 0$;
6. $y' + 4y = 2 + \sin(x)$.

Exercice 10 Déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11 1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)f(y)$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$

Exercice 12 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = \mathrm{e}^{x} f(y) + \mathrm{e}^{y} f(x)$$

Exercice 13 Résoudre l'équation différentielle $y' + y = |x|$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3 Équations différentielles du second ordre

Exercice 14 Déterminer les solutions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = 10\sin(x)$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$;
2. $y'' + 4y = 1 + \sin(2x)$;
3. $y'' - 2y' + 5y = \cos(2x)\,\mathrm{e}^{x}$;
4. $y'' + y' = \operatorname{sh}(x)$;
5. $y'' + 2y' + 4y = \sin(x)$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$;
6. $y'' - 4y' + 4y = 2\,\mathrm{e}^{2x} + 4$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 15 1. (a) Montrer que l'équation différentielle $y'' + y = 3x^2$ a une solution de la forme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire une expression de l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = 3x^2 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 2 \end{cases}$$

(a) Montrer que l'équation différentielle $2y'' - 3y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$ admet une solution de la forme $x \longmapsto (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^{x}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y'' - 3y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$.

Exercice 16 Résoudre les systèmes différentiels suivants d'inconnue $y, z \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y \end{cases}$

Exercice 17 1. On considère l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2 \tag{E}$$

(a) Soit $y \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une solution de (E). On considère la fonction $z : t \longmapsto y(\mathrm{e}^{t})$. Montrer que z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle $(\mathscr{E})$ à expliciter.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

(c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$.

Exercice 18 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2f(-x) + 1$$

Exercice 19 On veut déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \int_0^x (x-t)f(2t)\,\mathrm{d}t + 1 \tag{E}$$

Soit f une solution de (E).

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle dont f est solution.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).