Développements limités en zéro

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les développements limités suivants sont écrits au voisinage de zéro à l'ordre n ($2n$ pour la fonction cosinus et $2n+1$ pour la fonction sinus, circulaires ou hyperboliques).

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k+\mathrm{o}(x^n)$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k+\mathrm{o}(x^n)$$

$$\mathbf{ln(1+\boldsymbol{x})} \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+\mathrm{o}(x^n)$$

$$(\alpha\in\mathbb{R}^*) \qquad (\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}} \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k\,!}x^k+\mathrm{o}(x^n)$$

$$\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\cdots+\frac{x^n}{n\,!}+\mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k\,!}+\mathrm{o}(x^n)$$

$$\mathbf{ch}(\boldsymbol{x}) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}+\mathrm{o}(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)\,!}+\mathrm{o}(x^{2n})$$

$$\mathbf{sh}(\boldsymbol{x}) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}+\mathrm{o}(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}+\mathrm{o}(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)\,!}+\mathrm{o}(x^{2n})$$

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}+\mathrm{o}(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\mathbf{tan}(\boldsymbol{x}) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$$

$$\mathbf{Arctan}(\boldsymbol{x}) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$$

En particulier, on dispose des équivalents en zéro usuels suivants ($\alpha \neq 0$) :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \cos(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \mathrm{e}^{x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \mathrm{ch}(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$