

Nombres complexes

I – L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes

La construction de l'ensemble \mathbb{C} est hors-programme. Le résultat admis suivant permet de le définir. Il faut comprendre ce nouvel ensemble comme une extension de l'ensemble des nombres réels.

1) Définitions

Définition/théorème 1 Il existe un ensemble \mathbb{C} (dont les éléments sont appelés *nombres complexes*), contenant \mathbb{R} et muni de deux opérations $+$ et \times tels que :

- ★ il existe un élément dans \mathbb{C} , noté i , tel que $i^2 = -1$;
- ★ tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de manière sous la forme $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ (cette écriture s'appelle la *forme algébrique* de z)
- ★ les opérations $+$ et \times dans \mathbb{C} vérifient les mêmes propriétés que les propriétés $+$ et \times dans \mathbb{R}

Démonstration admis ■

Vocabulaire/Notations.

- ★ Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe (où $a, b \in \mathbb{R}$), on dit que a est la partie réelle de z (on la note $\text{Re}(z)$) et que b est sa partie imaginaire (on la note $\text{Im}(z)$). Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z)$$

- ★ Un nombre complexe est appelé *un imaginaire pur* si sa partie réelle est nulle. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs, noté $i\mathbb{R}$, est donc :

$$i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 1 Soient $z = 1 + 2i \in \mathbb{C}$ et $z' = 2 - 3i \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z + 2z' = 5 - 4i \quad \text{et} \quad zz' = 8 + i$$

Remarques :

- ★ Un nombre réel est donc un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.
- ★ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\text{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et $\text{Im}(z) \in \mathbb{R}$.
- ★ L'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe signifie que :

$$\forall a, a', b, b' \in \mathbb{R}, \quad a + ib = a' + ib' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

- ★ Attention, les inégalités n'ont aucun sens dans \mathbb{C} !

★ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib$ et $z' = c + id$ deux nombres complexes. Alors :

$$z + z' = \underbrace{(a + c)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{(b + d)}_{\in \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad zz' = (a + ib)(c + id) = \underbrace{(ac - bd)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{R}}$$

Ceci est la forme algébrique de zz' .

Proposition 1 (\mathbb{R} -linéarité des parties réelle et imaginaire) Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\operatorname{Re}(z + \lambda z') = \operatorname{Re}(z) + \lambda \operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z + \lambda z') = \operatorname{Im}(z) + \lambda \operatorname{Im}(z')$$

On dit que les application $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ et $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ sont \mathbb{R} -linéaires.

Démonstration On a :

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \quad \text{et} \quad z' = \operatorname{Re}(z') + i \operatorname{Im}(z')$$

donc :

$$z + \lambda z' = \underbrace{(\operatorname{Re}(z) + \lambda \operatorname{Re}(z'))}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{(\operatorname{Im}(z) + \lambda \operatorname{Im}(z'))}_{\in \mathbb{R}}$$

Mais on a aussi :

$$z + \lambda z' = \operatorname{Re}(z + \lambda z') + i \operatorname{Im}(z + \lambda z')$$

On en déduit les formules annoncées par unicité de la forme algébrique du nombre complexe $z + \lambda z'$. ■

Remarques :

★ C'est faux pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Par exemple :

$$0 = \operatorname{Im}(i^2) \neq i \operatorname{Im}(i) = i$$

★ En général :

$$\operatorname{Re}(zz') \neq \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z'}\right) \neq \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Re}(z')} \quad (\text{idem pour Im})$$

Exemple 2 La forme algébrique du nombre complexe $z = (1 + i\sqrt{3})^2$ est $-2 + 2i\sqrt{3}$.

2) Sommes de nombres complexes

Toutes les propriétés vu dans le chapitre sur les sommes/produits (chapitre 4) restent valables avec des nombres complexes. On pourrait par exemple démontrer que :

★ si $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leq n$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=m}^n q^k = q^m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$$

★ pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la factorisation :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

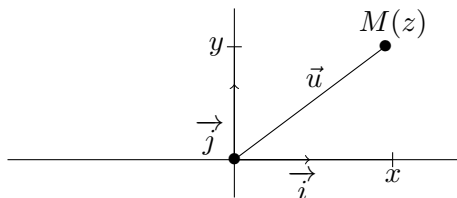
★ **formule du binôme de Newton** : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

3) Le plan complexe : entre image et affixe

On munit le plan usuel d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Si $z \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe, on appelle *image* de z le point M du plan de coordonnées $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$.
- Si $M(x, y)$ est un point du plan (respectivement si $\vec{v} = (x, y)$ est un vecteur du plan), on appelle *affixe* du point M (respectivement de \vec{v}) le nombre complexe $z = x + iy$.



Ceci nous permet d'identifier \mathbb{C} avec le plan muni du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (on parle de *plan complexe*).

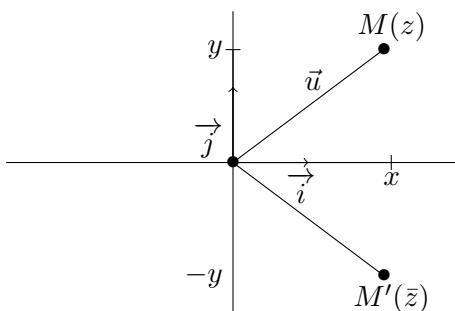
4) Conjugaison

Définition 1 Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *conjugué* de z , noté \bar{z} , le nombre complexe :

$$\bar{z} = \text{Re}(z) - i \text{Im}(z)$$

Exemple 3 $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$, $\bar{4} = 4$, $\overline{-i} = i$


Remarque : Si M est le point d'affixe z et si M' est le point d'affixe \bar{z} alors les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses dans le plan complexe.



Proposition 2 Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} \in \mathbb{C}$$

Démonstration Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par \bar{z} . ■

 **Exercice 1** Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z = \frac{1}{3 + 2i}$ et $w = \frac{2 - i}{1 - 5i}$

Proposition 3 (propriétés de la conjugaison) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{array}{lll} \star \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} & \star \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} & \star \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \\ \star \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}' & \star \bar{\bar{z}} = z & \star \text{si } z \neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \end{array}$$

Démonstration Soient $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z), z' = \operatorname{Re}(z') + i\operatorname{Im}(z') \in \mathbb{C}$. Alors :

- ★ $\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{2} = \operatorname{Re}(z)$;
- ★ $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{2i\operatorname{Im}(z)}{2i} = \operatorname{Im}(z)$;
- ★ $z + z' = \operatorname{Re}(z + z') + i\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Re}(z + z') - i\operatorname{Im}(z + z') = \bar{z} + \bar{z}'$ (en utilisant la \mathbb{R} -linéarité des parties réelle et imaginaire) ;
- ★ on a :

$$\begin{aligned} \overline{zz'} &= \overline{\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z') + i(\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Re}(z')\operatorname{Im}(z))} \\ &= \dots \end{aligned}$$

- ★ évident
- ★ si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a :

$$\bar{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = z \times \frac{1}{z} = \bar{1} = 1,$$

d'où le résultat en divisant par $\bar{z} \neq 0$. ■

Théorème 1 (caractérisation des réels et des imaginaires purs) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

1. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
2. $z + \bar{z} = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$ (*i.e.* z est un imaginaire pur)

Démonstration C'est une conséquence directe des deux premiers points de la proposition précédente. ■

Remarque : ce théorème est utile en pratique pour montrer qu'un nombre est réel ou imaginaire pur.

Exemple 4 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Donnons une condition nécessaire et suffisante sur z pour que le nombre complexe $Z = \frac{z+2}{z+1}$ soit un nombre réel. On a :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff \bar{z} = z \iff \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1} = \frac{z+2}{z+1} \iff z\bar{z} + \bar{z} + 2z + 2 = z\bar{z} + 2\bar{z} + z + 2 \\ &\iff z = \bar{z} \end{aligned}$$

Ainsi, pour que Z soit un nombre réel, il faut et il suffit que z en soit un (différent de -1).

5) Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. Remarquons que :

$$z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_+$$

Définition 2 Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le module de z , noté $|z|$, le nombre réel positif :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Remarques :

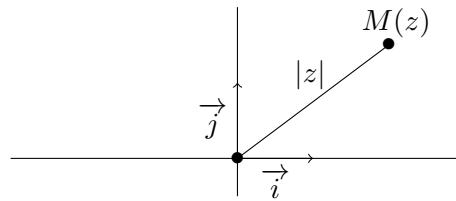
★ On a donc aussi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

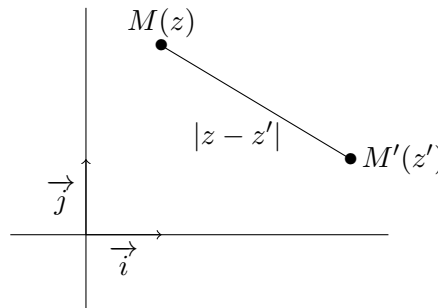
Par exemple, $|2 + i| = \sqrt{5}$.

★ Si $z \in \mathbb{R}$. Alors $|z| = \sqrt{z^2} = |z|$ (valeur absolue de z). Autrement dit, le module est un prolongement de la valeur absolue à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

★ Dans le plan complexe, le module $|z|$ du nombre complexe z est égale à la longueur $OM(z)$, le point M désignant l'image de z .



★ Plus généralement, si z et z' sont deux nombres complexes, le module $|z - z'|$ est égale à la distance $M(z)M'(z')$.



En identifiant un point du plan avec son affixe, on peut définir les notions de cercle, disque fermé et disque ouvert du plan complexe.

Définition 3 (cercle et disques du plan complexe) Soient A un point du plan complexe d'affixe $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+$. On appelle :

★ cercle de centre A et de rayon R l'ensemble :


$$\mathcal{C}(A, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = R\}$$

★ disque fermé de centre A et de rayon R l'ensemble :

$$\mathcal{D}_o(A, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq R\}$$

★ disque ouvert de centre A et de rayon R l'ensemble :

$$\mathcal{D}_f(A, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}$$


 **Exercice 2** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\frac{2}{1 + it}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Proposition 4 (propriétés du module) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

- ★ $|z| = 0 \iff z = 0$
- ★ $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- ★ $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- ★ $|zz'| = |z||z'|$
- ★ $z\bar{z} = |z|^2$
- ★ si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- ★ $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$
- ★ $|z| = |\bar{z}|$

Démonstration Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a :

- ★ $|z| = 0 \iff |z|^2 = 0 \iff \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z = 0$;
- ★ $|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \underbrace{\operatorname{Im}(z)^2}_{\geq 0} \geq \operatorname{Re}(z)^2$ puis on utilise la croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur \mathbb{R}_+ ;
- ★ idem ;
- ★ $|zz'| = \sqrt{zz' \overline{zz'}} = \sqrt{|z|^2 |z'|^2}$ d'où le résultat par multiplicativité du module et de la racine carrée ;
- ★ c'est la définition même du module ;
- ★ le quatrième point nous donne $|z'| \times \left|\frac{z}{z'}\right| = |z|$;
- ★ prendre $z = 1$ dans le point précédent ;
- ★ on a $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}z} = |z|$ car $\bar{\bar{z}} = z$. ■

 **Exercice 3** Calculer le module des nombres complexes $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$, $z_2 = (1 - i\sqrt{3})^4$, $z_3 = \frac{\sqrt{5} - i}{1 - i}$ et $z_4 = \frac{(1 - i)^3}{(1 + i)(i + \sqrt{2})}$

Remarque : en général $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ (prendre $z = -1$ et $z' = 1$ par exemple).

Proposition 5 (Inégalité triangulaire) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

- ★ $|z \pm z'| \leq |z| + |z'|$ avec égalité si et seulement si z et z' les vecteurs d'affixes z et z' sont colinéaires de même sens ;
- ★ $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'|$.

Ainsi :

$$||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

Rappels :

- ★ Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits *colinéaires* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

Ils sont dits *colinéaires de même sens* si de plus $\lambda \geq 0$.

- ★ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.
- ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq |x|$.

Démonstration ★ Comme les nombres $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$ sont positifs donc

$$\begin{aligned} |z + z'| \leq |z| + |z'| &\iff |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \\ &\iff (z + z') \overbrace{(z + z')}^{\bar{z} + \bar{z}'} \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ &\iff |z|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z' + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ &\iff z\bar{z}' + \bar{z}z' \leq 2|z||z'| \end{aligned}$$

Or $z\bar{z}' + \bar{z}z' = z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} = 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$ et on sait que $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |\operatorname{Re}(z\bar{z}')| \leq |z\bar{z}'| = |z||z'|$, ce qui établit la première inégalité.

★ D'après ce qui précède,

$$|z| = |z' + (z - z')| \leq |z'| + |z - z'| \quad \text{et donc} \quad |z| - |z'| \leq |z - z'|$$

et le même raisonnement en partant de z' conduit à $|z'| - |z| \leq |z - z'|$. Ces deux inégalités fournissent : $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

★ Étudions maintenant le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (première forme). On a égalité si et seulement si $\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'|$, c'est-à-dire si et seulement si $z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+$ car les réels positifs sont les seuls nombres complexes dont la partie réelle est égale au module.

- si $z' = 0$, alors z et z' sont colinéaires de même sens (par exemple car $z' = 0z$)
- si $z' \neq 0$, dire que $z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+$ revient à dire que (en divisant par $|z'|^2$), on a :

$$z \times \frac{\bar{z}'}{|z'|^2} = \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$$

ce qui signifie que z et z' sont colinéaires de même sens. ■

II – Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

1) Définition et premières propriétés

On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$$

Dans le plan complexe, on identifie \mathbb{U} avec le cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1 (appelé *cercle trigonométrique*).

Remarques :

- ★ L'ensemble (\mathbb{U}, \times) est donc un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
- ★ Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on a l'égalité $\bar{z} = \frac{1}{z}$ (car $|z|^2 = 1$).

Définition 4 (notation $e^{i\theta}$) Pour tout réel θ , on définit le nombre complexe $e^{i\theta}$ par :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Remarques :

- ★ C'est une notation. Nous verrons que la fonction $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta}$ partage un certain nombre de propriétés vérifiées par l'exponentielle réelle, mais pas toutes (penser à la positivité).
- ★ On a donc :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$$

Exemple 5 $e^{i \times 0} = 1, e^{i2\pi} = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Proposition 6 (paramétrisation de \mathbb{U}) On a l'égalité :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration On procède par double inclusion.

□ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} = 1$ donc :

$$\{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{U}$$

□ Soit $z = x + iy \in \mathbb{U}$, où $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 + y^2 = 1$ (par définition de \mathbb{U}), ce qui signifie que le point $M(x, y)$ appartient au cercle trigonométrique. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$. Ainsi, $z = e^{i\theta}$. Ceci fournit la deuxième inclusion.

On a donc l'égalité souhaitée. ■

Proposition 7 (propriétés algébriques de $e^{i\theta}$) Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \star e^{i\theta} e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} & \star e^{-i\theta} &= \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} & \star e^{i(\theta-\theta')} &= \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \\ \star e^{i\theta} = 1 &\iff \theta \equiv 0 [2\pi] & \star e^{i\theta} = e^{i\theta'} &\iff \theta \equiv \theta' [2\pi] \end{aligned}$$

Démonstration Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

★ On a :

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \end{aligned}$$

★ (iii) avec $\theta = 0$

★ D'après le premier point :

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \times \frac{e^{-i\theta'}}{e^{-i\theta'}} = \frac{e^{i(\theta-\theta')}}{e^0} = e^{i(\theta-\theta')}$$

★ On a :

$$e^{i\theta} = 1 \iff \cos(\theta) = 1 \text{ et } \sin(\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0 [2\pi]$$

★ découle des troisième et quatrième points. ■

Remarques :

★ D'après le dernier point de la proposition, on a aussi :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$$

★ Le calcul mené dans le premier point permet de retrouver les formules relatives à $\cos(p \pm q)$ et $\sin(p \pm q)$.

2) Formules d'Euler et de Moivre

Proposition 8 ★ **Formules d'Euler :**

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

★ **Formule de Moivre :**

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta},$$

c'est-à-dire $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Démonstration ★ Il suffit de faire le calcul.

★ Pour $n \in \mathbb{N}$, on procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, puis on utilise $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$. ■

3) À quoi servent ces formules ?

Ces trois formules (d'Euler et de Moivre) sont très utiles en pratique. Elles permettent de linéariser, d'anti-linéariser, d'avoir recours à la technique dite de l'angle moitié et de calculer des sommes trigonométriques

(a) à linéariser $\cos(x)^m \sin(y)^n$

Linéariser, c'est transformer une expression de la forme $\cos(x)^m \sin(y)^n$ (où $m, n \in \mathbb{N}^2$) en une expression de la forme $\sum_{p,q} (\alpha_p \cos(px) + \beta_q \sin(qx))$. L'intérêt, c'est qu'il n'y a plus d'exposant dans l'expression obtenue.

La méthode est toujours la même :

- (i) On applique les formules d'Euler.
- (ii) Ensuite on développe l'expression obtenue (en utilisant éventuellement la formule du binôme de Newton) et on utilise la formule de Moivre.
- (iii) Puis on regroupe les termes par paires et on applique à nouveau les formules d'Euler (*à l'envers*).

Exemple 6 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéarisons $\cos(\theta)^3$. On a :

$$\begin{aligned} \cos(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 && \text{(formule d'Euler pour le cosinus)} \\ &= \frac{e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{-i3\theta}}{8} && \text{(formule de Moivre)} \\ &= \frac{2 \cos(3\theta) + 6 \cos(\theta)}{8} && \text{(formule de Moivre pour le cosinus)} \\ &= \frac{\cos(3\theta)}{4} + \frac{3 \cos(\theta)}{4} \end{aligned}$$

Exemple d'application : calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^3 d\theta$.

(b) à anti-linéariser $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$

Il s'agit ici d'exprimer une expression de la forme $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ (où $(n, \theta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$) comme un polynôme en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exemple 7 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimons $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= (e^{i\theta})^3 \\ &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 \\ &= \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 + i(3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)^3) \end{aligned}$$

et donc, par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on obtient :

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = 3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)^3$$

Plus généralement, on a le résultat suivant (qu'il faut savoir redémontrer pour n quelconque ou pour une valeur de n particulière).

Proposition 9 (anti-linéarisation) Pour tout $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(n\theta) = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p} (-1)^p \sin(\theta)^{2p}$$

et :

$$\sin(n\theta) = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} \cos(\theta)^{n-2p-1} (-1)^p \sin(\theta)^{2p+1}$$

Démonstration Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. D'après la formule de Moivre, on a :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} i^k \sin(\theta)^k \end{aligned}$$

en utilisant la formule du binôme de Newton. Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on conclut donc que :

$$\cos(n\theta) = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p} (-1)^p \sin(\theta)^{2p}$$

et :

$$\sin(n\theta) = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} \cos(\theta)^{n-2p-1} (-1)^p \sin(\theta)^{2p+1}$$

car $i^{2p+1} = (-1)^p i$. ■

(c) Technique de l'angle moitié

C'est la technique est contenue dans la démonstration du résultat suivant.

Proposition 10 Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Alors :

$$e^{ip} - e^{iq} = 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}, \quad e^{ip} + e^{iq} = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$$

et :

$$1 - e^{iq} = -2i \sin\left(\frac{q}{2}\right) e^{i\frac{q}{2}}, \quad 1 + e^{iq} = 2 \cos\left(\frac{q}{2}\right) e^{i\frac{q}{2}}$$

Démonstration Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Alors :

$$e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{q-p}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$$

d'après la formule d'Euler. La deuxième formule se démontre de manière analogue. Il suffit de prendre $p = 0$ dans les deux dernières. ■

La technique de l'angle moitié permet de factoriser $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Corollaire 1 Pour tout $p, q \in \mathbb{R}$, on a les identités :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

et :

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Démonstration Soit $p, q \in \mathbb{R}$. En explicitant $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la proposition précédente, on a :

$$e^{ip} - e^{iq} = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) - 2i \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Par ailleurs :

$$e^{ip} - e^{iq} = (\cos(p) - \cos(q)) + i(\sin(p) - \sin(q))$$

donc, par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on obtient bien les deux dernières formules. ■

(d) à calculer des sommes trigonométriques

Les techniques précédentes permettent également de calculer des sommes comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 8 Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Calculons les sommes :

$$C_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

En posant $E_n(\theta) = C_n(\theta) + iS_n(\theta)$, on a par linéarité de la somme :

$$E_n(\theta) = \sum_{k=0}^n (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$$

On distingue ensuite deux cas :

★ **Premier cas** : $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $k\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ donc $e^{ik\theta} = 1$ d'où $E_n = n + 1$. Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on a alors :

$$C_n(\theta) = n + 1 \quad \text{et} \quad S_n(\theta) = 0$$

★ **Deuxième cas** : $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$

Alors $e^{i\theta} \neq 1$ donc (en utilisant la formule de Moivre et la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$) :

$$\begin{aligned} E_n(\theta) &= \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{n\theta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc conclure que :

$$C_n(\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n(\theta) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

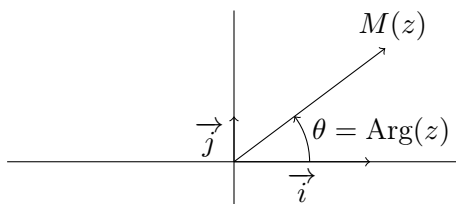
III – Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1) Argument d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1 (puisque $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$), *i.e.* $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Définition 5 (argument) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que :

$$z = |z| e^{i\theta}$$



Un argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(z)})$, où $M(z)$ est l'image de z dans le plan complexe.

Remarques :

- ★ Par convention, le nombre complexe 0 n'admet pas d'argument.
- ★ Il n'y a pas unicité de l'argument : par exemple $1 = e^{i \times 0} = e^{i2\pi}$ donc 0 et 2π sont deux arguments du nombre complexe 1.

Proposition 11 Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z . L'ensemble des arguments de z est :

$$\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

L'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelé *détermination principale de l'argument* de z

Démonstration On raisonne par double inclusion.

- ★ Soit φ un argument de z . Alors $|z|e^{i\theta} = |z|e^{i\varphi}$. Or $|z| \neq 0$ (car $z \neq 0$) donc $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, ce qui implique que $\theta \equiv \varphi [2\pi]$.
- ★ Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\theta + 2k\pi$ est un argument de z car :

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta} \times \underbrace{e^{2ik\pi}}_{=1} = e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$$

L'ensemble des arguments de z est $\{\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. ■

Notation. Si $z \in \mathbb{C}^*$ et si θ est un argument de z , on écrira $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.

Remarque : pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv 0 [\pi] \quad \text{et} \quad z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Exemple 9 ★ $\arg(1) \equiv 0 [2\pi]$

★ $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

★ Soit $z = \sqrt{3} + i$. Alors (en factorisant z par son module) :

$$z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

donc $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

Définition 6 (forme trigonométrique) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ dont un argument est $\theta \in \mathbb{R}$. L'écriture :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

s'appelle la forme trigonométrique de z .

Exemple 10 ★ La forme trigonométrique de $z = 1$ est $z = 1 \times e^{i0}$.

★ La forme trigonométrique de $z = i$ est $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

★ La forme trigonométrique de $z = \sqrt{3} + i$ est $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Remarques :

★ Par convention, le nombre complexe 0 n'admet pas de forme exponentielle.

★ Si un nombre complexe non nul s'écrit $z = ae^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, alors cette écriture est la forme trigonométrique de z si et seulement si $a \in \mathbb{R}_+^*$. Par exemple, $z = -e^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas écrit sous forme trigonométrique. Or $-1 = e^{i\pi}$ donc $z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

 **Exercice 4** Écrire les nombres complexes sous forme trigonométrique :

$$a = -4e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad b = 3 - 3i, \quad c = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i} \quad \text{et} \quad d = 1 + e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Proposition 12 (propriétés de l'argument) Pour tous complexes non nuls z et z' , on a :

- ★ $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$;
- ★ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$;
- ★ $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) \equiv n \times \arg(z) [2\pi]$.

Démonstration Il suffit de mettre z et z' sous forme trigonométrique. ■

Proposition 13 Soient $r, r' \in \mathbb{R}_+$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors :

$$r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration On raisonne par double implication.

\Leftarrow C'est immédiat car $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$.

\Rightarrow Si $r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'}$, alors (en prenant les modules), on a (par multiplicativité du module et puisque $r, r' \in \mathbb{R}_+$) :

$$r |e^{i\theta}| = r' |e^{i\theta'}| \quad \text{c'est-à-dire} \quad r = r'$$

Il reste $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, d'où l'on tire l'égalité modulaire. ■

2) Transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$ en $R \cos(x + \varphi)$

Proposition 14 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Il existe $R, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \cos(x) + b \sin(x) = R \cos(x - \varphi)$$

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. On factorise par $A = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) \right)$$

Le point de coordonnées $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ appartient au cercle trigonométrique donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\varphi)$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin(\varphi)$. Donc

$$a \cos(x) + b \sin(x) = A(\cos(\varphi) \cos(x) + \sin(\varphi) \sin(x)) = A \cos(x - \varphi) \quad \blacksquare$$

 **Exercice 5** Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{3}$.

Solution. On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x) \right) \\ &= 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(x) \right) \\ &= 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{3} &\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

IV – Équations algébriques

1) Équations produit-nul

Proposition 15 (intégrité de \mathbb{C}) Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a :

$$zw = 0 \iff z = 0 \text{ ou } w = 0$$

Démonstration Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Si $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z}$ est un nombre complexe bien défini donc :

$$zw = 0 \iff \frac{1}{z} \times zw = \frac{1}{z} \times 0 \iff w = 0$$

ce qui démontre le résultat. \blacksquare

On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ *intègre* (cf. chapitre 11).

2) Trinômes du second degré à coefficients complexes

On sait résoudre une équation du second degré à coefficients réels, c'est-à-dire :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{où} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

Nous allons ici considérer des coefficients a , b et c complexes.

(a) Racine carrée d'un nombre complexe

Définition 7 (racine carrée d'un nombre complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *racine carrée* de z tout nombre complexe a tel que $a^2 = z$.

Exemple 11 Une racine carrée de 4 est 2 ou -2 , une racine carrée de -1 est i ou $-i$.

Remarques :

- ★ On n'écrira jamais « \sqrt{z} » pour $z \in \mathbb{C}$, à moins que z soit un élément de \mathbb{R}_+ bien sûr.
- ★ Le nombre complexe 0 admet une et une seule racine carrée : lui-même. En effet :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad a^2 = 0 \iff a = 0$$

par intégrité de \mathbb{C} .

- ★ On peut démontrer qu'un nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées.

Il est aisé de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe qui est déjà écrit sous forme trigonométrique.

Exemple 12 ★ Les racines carrées de $z = 1 + i$ sont $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

- ★ Les racines carrées de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $\pm e^{i\frac{\pi}{4}}$, soit encore $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.

Justification.

- ★ On a $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Soit $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ où $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} a^2 = z &\iff r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \iff \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta \equiv \frac{\pi}{8} [\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

- ★ On procède de la même manière.

Comment trouver les racines carrées de z si l'on ne dispose pas de forme trigonométrique ?

Si on ne connaît que la forme algébrique $z = x + iy$ (où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), on pourra procéder comme suit pour déterminer les racines carrées de z . On considère $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $a = X + iY$. Alors :

$$a^2 = z \iff X^2 - Y^2 + 2iXY = x + iy \iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \\ (X^2 + Y^2)^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe et car $|a|^2 = x^2 + y^2$.

Exemple 13 Avec les mêmes notations, si $z = 1 + i$, alors :

$$a^2 = 1 + i \iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = 1 \\ 2XY = 1 \\ (X^2 + Y^2)^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = 1 \\ 2XY = 1 \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{car } X^2 + Y^2 \geq 2)$$

$$\iff \begin{cases} X = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} \text{ et } Y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} \\ 2XY = 1 \end{cases}$$

D'après la deuxième équation, X et Y sont de même signe donc les racines carrées de $z = 1 + i$ sont :

$$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} \right)$$

(b) Équations du second degré

Proposition 16 (équations du second degré à coefficients complexes) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On considère l'équation du second degré :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{E})$$

d'inconnue z et on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (appelé *discriminant de (E)*).

★ si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution (complexe a priori), à savoir $z_0 = -\frac{b}{2a}$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$$

★ si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet exactement deux solutions (complexes a priori) distinctes, à savoir :

$$z_1 = \frac{b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{b - \delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée de Δ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Remarque : bien entendu, ce résultat généralise celui bien connu pour les équations à coefficients réels.

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit le trinôme du second degré $az^2 + bz + c$ sous forme canonique pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de (E)} &\iff z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \quad (\text{car } a \neq 0) \\ &\iff \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\iff \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \\ &\iff z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Exemple 14 Considérons l'équation du second degré $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$. Le discriminant Δ de cette équation vaut :

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(i - 1) = 1 \neq 0$$

donc les racines cherchées (complexes) sont $1 + i$ et i .

(c) Relations coefficients-racines

Proposition 17 (relations coefficients-racines) Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \iff (x \text{ et } y \text{ sont racines de } z^2 - sz + p = 0)$$

Démonstration On raisonne par double implication.

★ Supposons que x et y soient solutions du système. Alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z - x)(z - y) = z^2 - (x + y)z + xy = z^2 - sz + p$$

donc x et y sont racines de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

★ Réciproquement, si x et y sont racines de cette équation, alors on a la factorisation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z - x)(z - y) = z^2 - sz + p$$

d'où l'on tire les égalités $x + y = s$ et $xy = p$ (en prenant $z = 0$ puis $z = 1$ par exemple). ■

Exemple 15 Les solutions dans \mathbb{C}^2 du système $\begin{cases} x + y = 1 + 2i \\ xy = 1 - i \end{cases}$ sont $(1 + i, i)$ et $(i, 1 + i)$.

3) Racines $n^{\text{èmes}}$

Soit n un entier naturel non nul fixé.

Définition 8 (racine n^e) ★ Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que $a \in \mathbb{C}$ est une racine $n^{\text{èmes}}$ de z si $a^n = z$.

★ Une racine $n^{\text{èmes}}$ de 1 est appelée une racine n^e de l'unité. L'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, c'est-à-dire :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

Remarques :

★ Le nombre complexe 0 a une seule racine $n^{\text{ème}}$, à savoir 0.

★ On a les inclusions $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$.

Proposition 18 (description des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Alors :

$$\mathbb{U}_n = \{\xi_k \mid k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket\}$$

L'ensemble \mathbb{U}_n contient n éléments.

Remarque : à noter que $\xi_0 = \xi_n = 1$.

Démonstration On raisonne par double inclusion.

□ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a d'après la formule de Moivre :

$$\xi_k^n = e^{2ik\pi} = 1 \quad (\text{puisque } k \in \mathbb{N})$$

donc $\{\xi_k \mid k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket\} \subset \mathbb{U}_n$.

□ Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors $z^n = 1$ ce qui entraîne que $|z|^n = 1$ et donc $|z| = 1$ (puisque $|z| \in \mathbb{R}_+$). Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Or $z^n = 1$ donc $e^{in\theta} = 1$ donc $n\theta \equiv 0 [2\pi]$, ce qui implique qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{2k\pi}{n}$. En effectuant une division euclidienne, on peut se ramener à $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On a donc bien l'égalité annoncée. Il reste à vérifier que les nombres complexes $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ sont deux à deux distincts. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$ tel que $\xi_k = \xi_\ell$. Alors $\frac{2k\pi}{n} = \frac{2\ell\pi}{n} \equiv 0 [2\pi]$, c'est-à-dire $k \equiv \ell [1]$. Comme k et ℓ sont des entiers, cela implique que $k = \ell$. ■

Remarques :

★ Posons $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors $\xi_k = \xi^k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ce qui implique que :

$$\mathbb{U}_n = \{\xi^k \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$$

★ On déduit du point précédent que, si $n \geq 2$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = \frac{1 - \xi^n}{1 - \xi} = 0$$

car $\xi \neq 1$ (puisque $n \geq 2$).

Exemple 16 ★ $\mathbb{U}_1 = \{1\}$;

★ $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$;

★ $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et donc $1 + j + j^2 = 0$ (et $\bar{j} = j^2$) ;

★ $\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -i, i\}$

Géométriquement, les images des éléments de \mathbb{U}_n dans le plan complexe forment un polygone régulier à n côtés.

Proposition 19 (racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique)

Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $z = r e^{i\theta}$. Les racines $n^{\text{èmes}}$ de z sont les nombres complexes de la forme $\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} \xi_k$ où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Démonstration Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} a \text{ est une racine } n^{\text{e}} \text{ de } z &\iff a^n = 1 = \left(\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} \right)^n \\ &\iff \left(\frac{a}{\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}} \right)^n = 1 \\ &\iff \frac{a}{\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}} \in \mathbb{U}_n \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{a}{\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}} = \xi_k \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} \xi_k, \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. ■

Exemple 17 Les racines cubiques de 2 sont $\sqrt[3]{2}$, $j\sqrt[3]{2}$ et $j^2\sqrt[3]{2}$.

V – Exponentielle complexe

Définition 9 (exponentielle d'un nombre complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *exponentielle de z* , notée e^z (ou $\exp(z)$), le nombre complexe :

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i \operatorname{Im}(z)}$$

Remarque : l'exponentielle *complexe* est donc définie à partir de l'exponentielle réelle et de l'exponentielle $e^{i\theta}$.

Proposition 20 (propriétés de l'exponentielle complexe) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

- ★ $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$;
- ★ $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi]$;
- ★ $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$;
- ★ $e^z \neq 0$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ et $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$

Démonstration Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

★ On a :

$$\overline{e^z} = e^{\operatorname{Re}(z)} \overline{e^{i \operatorname{Im}(z)}} = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{-i \operatorname{Im}(z)} = e^{\overline{z}}$$

★ Par multiplicativité du module :

$$|e^z| = |e^{\operatorname{Re}(z)}| |e^{i \operatorname{Im}(z)}| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

La définition de e^z est précisément sa forme trigonométrique, d'où la relation pour l'argument.

★ exercice

★ Le point précédent nous donne $e^z \times e^{-z} = e^0 = 1$. ■

Proposition 21 Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$e^z = e^{z'} \iff z \equiv z' [2\pi]$$

et, en particulier,

$$e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Démonstration On commence par établir le cas particulier en raisonnant par double implication. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (où $x, y \in \mathbb{R}$).

★ Si $e^z = 1$, alors $e^x e^{iy} = 1$ donc $e^x = |e^z| = 1$, d'où $x = 0$ et $e^{iy} = 1$, ce qui implique qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$.

★ Réciproquement, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$, alors on a clairement $e^z = 1$.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors $e^{z'} \neq 0$ donc :

$$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\iff \frac{e^z}{e^{z'}} = 1 \iff e^{z-z'} = 1 \quad (\text{propriété de l'exponentielle complexe}) \\ &\iff z - z' \in 2ik\pi \\ &\iff z \equiv z' [2i\pi] \end{aligned}$$
■

Remarque : l'application $\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{cases}$ n'est donc ni surjective (0 n'admettant pas d'antécédent), ni injective.

Proposition 22 L'application $\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{cases}$ est surjective. Plus précisément, pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\exp^{-1}(\{a\}) = \{ \ln(|a|) + i(\theta + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Démonstration On sait déjà que la fonction \exp est à valeurs dans \mathbb{C}^* . Soit maintenant $a \in \mathbb{C}^*$. En notant θ un argument de a , on a :

$$a = |a|e^{i\theta} = e^{\ln(|a|)+i\theta}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors (en utilisant la proposition précédente) :

$$\begin{aligned} \exp(z) = a &\iff e^z = e^{\ln(|a|)+i\theta} &\iff z \equiv \ln(|a|) + i\theta \pmod{2i\pi} \\ &&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln(|a|) + i(\theta + 2k\pi) \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des antécédents de a par \exp dans \mathbb{C} est :

$$\exp^{-1}(\{a\}) = \{ \ln(|a|) + i(\theta + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

En particulier, \exp est surjective. ■

VI – Interprétation géométrique des nombres complexes

1) Similitudes directes du plan

Définition 10 (translation, homothétie, rotation) ★ On appelle translation du plan complexe toute transformation de la forme :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + b \end{cases}$$

où $b \in \mathbb{C}$.

★ On appelle homothétie de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rapport $r > 0$ toute transformation de la forme :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + r(z - \omega) \end{cases}$$

★ On appelle translation de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ toute transformation de la forme :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + e^{i\theta}(z - \omega) \end{cases}$$

★ On appelle translation de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ toute transformation de la forme :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + e^{i\theta}(z - \omega) \end{cases}$$

★ On appelle similitude directe du plan complexe toute transformation de la forme :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + e^{i\theta}(z - \omega) \end{cases}$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et l'application $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b \end{cases}$.

- Si $a = 1$, alors f est la translation du plan complexe de vecteur d'affixe b .
- Si $a \neq 1$, alors f possède un et un seul point fixe, à savoir $\omega = \frac{b}{1-a}$. Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) - \omega = (az + b) - (a\omega + b) = a(z - \omega) = e^{i\theta} \times |a|(z - \omega)$$

en notant θ un argument de a . Donc f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centres (on dit que ω est le centre de la similitude, $|a|$ est le rapport de celle-ci et θ est la mesure de celle-ci).

Exemple 18 L'application $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 2iz + 1 \end{cases}$ est la similitude directe de centre $\frac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

2) Interprétation géométrique de $\frac{c-a}{b-a}$

Proposition 23 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $b \neq a$. On note A, B et C les images de a, b et c respectivement dans le plan complexe. Alors :

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi]$$

Démonstration On a :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(c-a) - \arg(b-a) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{i}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi]$$

donc :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{|c-a|}{|b-a|} e^{i(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \frac{AC}{AB} e^{i(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \quad \blacksquare$$

Conséquences. Avec les mêmes notations :

- ★ les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$;
- ★ les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 6 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le triangle de sommets les points d'affixes z, z^2 et z^3 soit rectangle en z .

Une solution.

Les nombres complexes $z = 0$ et $z = 1$ conviennent. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Le triangle de sommets les points d'affixes z, z^2 et z^3 est rectangle en z si et seulement si $\frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in i\mathbb{R}$, d'où l'on tire que $\operatorname{Re}(z) = -1$. L'ensemble cherché est donc :

$$\{0, 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = -1\}$$

VII – Extension de la dérivation pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{C}

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On définit les fonctions partie réelle et partie imaginaire de f , notées $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ par :

$$\forall x \in I, \quad \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x))$$

Les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont à valeurs réelles.

Définition 11 ★ Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables en a . Dans ce cas, on appelle nombre dérivée de f en a , noté $f'(a)$, le nombre complexe défini par :

$$f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i\operatorname{Im}(f)'(a)$$

★ On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I . La dérivée de f est alors la fonction :

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto f'(x) \end{cases}$$

Les formules de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions complexes sont les mêmes que pour les fonctions réelles (voir chapitre 1), de même que la formule de dérivation d'une composée.

Exemple 19 — La fonction $f : x \mapsto x^2 + i \sin(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} (car les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sin(x)$ le sont) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x + i \cos(x)$$

— La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x+i}$ est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -\frac{1}{(x+i)^2}$$

Pour les fonctions complexes, on ne peut pas parler de monotonie ni de signe de la dérivée ! On peut néanmoins caractériser les fonctions constantes sur un intervalle avec la dérivée.

Théorème 2 (caractérisation des fonctions dérivables constantes) Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I . La fonction f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .

Démonstration On a :

$$\begin{aligned} f' \text{ est nulle sur } I &\iff \operatorname{Re}(f)' \text{ et } \operatorname{Im}(f)' \text{ sont nulles sur } I \\ &\iff \operatorname{Re}(f) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \text{ sont constantes sur } I \end{aligned}$$

d'après ce qu'on a vu pour les fonctions dérivables sur un intervalle à valeurs réelles. ■