Relations binaires

La notion de relation permet de comparer des objets mathématiques. Par exemple :

— quand nous disons que 3 est inférieur ou égal à 5, nous mettons en relation les nombres 3 et 5 avec la relation « inférieur ou égal » ;

— quand nous disons que $1+i$ et $1-i$ ont même module, nous sommes en train de comparer deux nombres complexes à l'aide du module.

— Dans la série *Demain nous appartient*, Chloé aime Alex. La relation amoureuse est ici à l'honneur.

Dans tout ce chapitre, E désigne un ensemble non vide quelconque.

I – Relations binaires

Nous définissons ici ce qu'est une relation binaire sur un ensemble.

Définition 1 (relation)

⋆ On appelle *relation* binaire sur E toute partie $\mathscr{R}$ de $E \times E$.

⋆ Si $\mathscr{R}$ est une telle relation et si $(x,y) \in \mathscr{R}$, on dit que « x est en relation avec y par la relation $\mathscr{R}$ », ce que l'on note :

$$x\mathscr{R}y$$

Exemple 1

⋆ Considérons la relation $\mathscr{R} = \{(-x,x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ici $-x\mathscr{R}x$. La relation $\mathscr{R}$ est ici la relation d'être égal au signe près (ou, de manière équivalente, d'être égal en valeur absolue).

⋆ La relation $\mathscr{R} = \{(n,2n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ sur $\mathbb{N}$ est la relation « être le double de ».

⋆ Considérons la relation « divise », notée $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $[\![1,4]\!]$. Autrement dit :

$$\forall (a,b) \in [\![1,4]\!], \qquad a\mathscr{R}b \iff a \mid b$$

Alors :

$$\mathscr{R} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(4,4)\}$$

⋆ Dans *Demain nous appartient*, on peut considérer la relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble des personnages $\{\text{Chloé}, \text{Alex}, \text{Victor}, \text{Flore}\}$ dont les relations sont :

$$\text{Alex}\,\mathscr{R}\,\text{Chloé}, \qquad \text{Chloé}\,\mathscr{R}\,\text{Alex}, \qquad \text{Victor}\,\mathscr{R}\,\text{Victor} \qquad \text{et} \qquad \text{Flore}\,\mathscr{R}\,\text{Alex},$$

la relation étant à comprendre comme suit :

$$\text{Tartampion}\,\mathscr{R}\,\text{Barnabé} \iff \text{Tartampion aime Barnabé}$$

Remarque : le couple $(x,y) \in E^2$ n'étant pas le couple $(y,x) \in E^2$ (si $x \neq y$), la relation $x\mathscr{R}y$ peut être vraie sans que la relation $y\mathscr{R}x$ le soit ! Par exemple :

⋆ Pour la relation divise ci-dessus, on a $1\mathscr{R}4$ mais on n'a pas $4\mathscr{R}1$.

⋆ Pour la relation amoureuse, Flore aime Alex mais Alex n'aime pas Flore.

1) Relation d'ordre

Les propriétés importantes que doivent vérifier les « bonnes » relations sont les suivantes.

Définition 2 (relation d'ordre) Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'ordre* sur E si elle est :

- ⋆ la relation $\mathscr{R}$ est *réflexive* si :
$$\forall x \in E, \qquad x\mathscr{R}x$$
- ⋆ la relation $\mathscr{R}$ est *antisymétrique* si :
$$\forall x, y \in E, \qquad \big(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x\big) \Longrightarrow x = y$$
- ⋆ la relation $\mathscr{R}$ est *transitive* si :
$$\forall x, y, z \in E, \qquad \big(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z\big) \Longrightarrow x\mathscr{R}z$$

On dit aussi que $\mathscr{R}$ est un *ensemble ordonné.*

Notation. une relation d'ordre est souvent notée $\leqslant$ ou $\preceq$.

Remarque : en pratique, on n'explicite pas l'ensemble $\mathscr{R}$ (comme sous-ensemble de E^2) mais on manipule directement la relation en comparant les éléments de E *via* cette relation.

Exemple 2 ⋆ Sur $\mathbb{R}$, la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre. En effet :
- — pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $x \leqslant x$;
- — pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$;
- — pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.

- ⋆ sur $\mathscr{P}(E)$, la relation $\subset$ est une relation d'ordre
- ⋆ dans $\mathbb{N}$, la relation $|$ est une relation d'ordre ; par contre elle ne l'est pas dans $\mathbb{Z}$ (à cause de la propriété d'antisymétrie)
- ⋆ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la relation $\leqslant$ est un ensemble ordonné
- ⋆ la relation dans DNA n'est pas une relation d'ordre (Alex et Chloé sont deux personnages distincts)

Définition 3 (ordre partiel, ordre total) Soit $\mathscr{R}$ est ensemble ordonné sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est un ordre *total* sur E (ou que $\mathscr{R}$ est un ensemble *totalement ordonné*) si :
$$\forall x, y \in E, \qquad x\mathscr{R}y \text{ ou } y\mathscr{R}x$$
Dans le cas contraire, on dit que la relation d'ordre $\mathscr{R}$ est *partielle.*

Remarque : dire que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre totale sur E signifie donc que deux éléments quelconques x et y de E peuvent être comparés ; on a nécessairement ou bien $x\mathscr{R}y$, ou bien $y\mathscr{R}x$.

Exemple 3 ⋆ L'ensemble $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné.
- ⋆ Par contre, $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est partiellement ordonné dès que $|E| \geqslant 2$.
- ⋆ De même, l'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est partiel.
- ⋆ La relation d'ordre $|$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas totale (en effet, 4 et 5 ne sont pas en relation).
- ⋆ La relation dans DNA est partielle (on ne peut pas comparer Victor et Alex).

2) Majorants, minorants

On peut généraliser les notions de majorant, minorant, maximum et minimum vus dans $\mathbb{R}$ à un ensemble ordonné.

Définition 4 (majorant, minorant) Soient $\leqslant$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$. Soit encore $x \in E$.

- ⋆ On dit que x est *majorant de* A si :
$$\forall a \in A, \qquad a \leqslant x$$
On dit aussi que A est majoré (pour $\leqslant$) par x.
- ⋆ On dit que a est *le plus grand élément de* A (ou *le maximum de* A) si :
$$x \in A \qquad \text{et} \qquad \forall a \in A, \qquad a \leqslant x$$
On note alors $x = \max(A)$.
- ⋆ On dit que x est *minorant de* A si :
$$\forall a \in A, \qquad x \leqslant a$$
- ⋆ On dit que a est *le plus petit élément de* A (ou *le minimum de* A) si :
$$x \in A \qquad \text{et} \qquad \forall a \in A, \qquad x \leqslant a$$
On note alors $x = \min(A)$.
- ⋆ On dira que la relation $\subset$ est bornée s'il est à la fois minoré et majoré.

Remarque : la définition sous-entend l'unicité du maximum et/ou du minimum lorsqu'il(s) existe(nt), ce qui s'obtient avec la propriété d'antisymétrie de la relation $\leqslant$ (il est ici supposé que $\leqslant$ est une relation d'ordre).

Exemple 4
- ⋆ Pour la relation $\leqslant$, l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est ni majoré, ni minoré (en particulier, il n'admet ni minimum, ni maximum).
- ⋆ Pour la relation $\leqslant$, l'ensemble $[0, 1[$ est majoré par 1, n'admet pas de maximum, est minoré par -5 et cet ensemble ordonné admet 0 pour minimum.
- ⋆ $(\mathbb{N}, |)$ admet pour minimum 1 et pour maximum 0 (en effet, tout entier naturel n divise 0 puisque l'on peut écrire $0 = n \times 0$).
- ⋆ $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est minoré par $\varnothing$ et majoré par E. Par ailleurs, $\varnothing = \min(\mathscr{P}(E))$ et $E = \max(\mathscr{P}(E))$. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est donc borné pour la relation $\subset$.

II – Relation d'équivalence

1) Définition

Définition 5 (relation d'équivalence) Une relation $\mathscr{R}$ sur E est appelée une *relation d'équivalence* si elle est :

- ⋆ réflexive :
$$\forall x \in E, \qquad x \mathscr{R} x$$
- ⋆ *symétrique*, c'est-à-dire :
$$\forall x, y \in E, \qquad x \mathscr{R} y \Longrightarrow y \mathscr{R} x$$
- ⋆ $\mathscr{R}$ transitive :
$$\forall x, y, z \in E, \qquad \big(x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z\big) \Longrightarrow x \mathscr{R} z$$

Exemple 5 ⋆ La relation d'égalité $=$ sur E est une relation d'équivalence (c'est aussi une relation d'ordre).

- ⋆ Soit F un ensemble non vide et $f \in F^E$. La relation $\mathscr{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in E, \qquad x \mathscr{R} y \iff f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence sur E.
- ⋆ La relation dans DNA n'est pas une relation d'équivalence.
- ⋆ Sur $\mathbb{N}$, la relation de divisibilité $\mid$ n'est pas une relation d'équivalence (la propriété de symétrie étant mise en défaut). Il s'agit par contre d'une relation d'ordre.
- ⋆ Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre qui n'est pas une relation d'équivalence.

2) Un exemple important : la relation de congruence

(a) Congruences dans $\mathbb{Z}$

Définition 6 (congruence) Soit $a, b, n \in \mathbb{Z}$. On dit que *a est congru à b modulo n*, noté $a \equiv b\ [n]$, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.

Exemple 6 On a $7 \equiv 3\ [2]$, $13 \equiv -1\ [7]$.

Remarques :

- ⋆ La congruence modulo 0 est tout simplement la relation d'égalité.
- ⋆ La congruence modulo 1 est la relation triviale : tous les entiers sont congrus entre eux modulo 1.
- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la congruence modulo n est la congruence modulo $-n$ (cela ne change rien à remplacer n par $-n$ dans la définition précédente).

Proposition 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que la relation de congruence modulo n est réflexive, symétrique et transitive.

- ⋆ Soit $a \in \mathbb{Z}$. On peut écrire que $a = a + 0 \times n$ (et $0 \in \mathbb{Z}$) donc $a \equiv a[n]$. La relation est donc réflexive.
- ⋆ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \equiv b[n]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$, ce que l'on peut réécrire :

$$b = a + (-k)n$$

Comme $-k \in \mathbb{Z}$ (puisque $k \in \mathbb{Z}$), on a aussi $b \equiv a[n]$. La relation est donc symétrique.
- ⋆ Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$. Alors il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = b + kn \qquad \text{et} \qquad b = c + \ell n$$

Par conséquent :

$$a = (c + \ell n) + kn = c + (\ell + k)n$$

Comme $\ell + n \in \mathbb{Z}$ (puisque ℓ et k sont des entiers), on a la relation $a \equiv c[n]$. La relation est donc aussi transitive.

Finalement, la congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. ■

(b) Congruences dans $\mathbb{R}$

Définition 7 (congruence) Soit $(a,b,\alpha) \in \mathbb{R}^3$. On dit que *$a$ est congru à b modulo α*, noté $a \equiv b[\alpha]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.

Remarques :

- ⋆ Dans la définition, le k est un entier. La congruence modulo 0 est tout simplement la relation d'égalité.
- ⋆ Nous utiliserons souvent la relation de congruence modulo 2π (ou π).

Exemple 7 $\dfrac{13\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [\pi]$

Proposition 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La congruence modulo α est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Démonstration La démonstration est identique à la précédente. ■

3) Classes d'équivalences

La notion de classe d'équivalence permet de rassembler, dans un ensemble muni d'une relation d'équivalence, tous les éléments qui sont en relation.

Définition 8 (classe d'équivalence) Soient $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E

- ⋆ Soit $x \in E$. On appelle *classe (d'équivalence) de x modulo $\mathscr{R}$* l'ensemble noté $\bar{x}$ des éléments de E qui sont en relation avec x, c'est-à-dire :

$$\bar{x} = \left\{ y \in E \,\middle|\, x\mathscr{R}y \right\}$$

- ⋆ L'ensemble des classes d'équivalences de E pour la relation $\mathscr{R}$ est noté $E/\mathscr{R}$. Autrement dit :

$$E/\mathscr{R} = \left\{ \bar{x} \,\middle|\, x \in E \right\}$$

Cet ensemble est aussi appelé *ensemble quotient de E par la relation $\mathscr{R}$.*

Remarques :

- ⋆ $E/\mathscr{R}$ est un ensemble de sous-ensembles de E. Autrement dit, $E/\mathscr{R} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.
- ⋆ Si $x, y \in E$ sont tels que $x\mathscr{R}y$, alors $\overline{x} = \overline{y}$.

Justification. Soit $z \in \overline{x}$. Alors $z\mathscr{R}x$. Si $x\mathscr{R}y$, alors $z\mathscr{R}y$ par transitivité de $\mathscr{R}$. On a donc $\overline{x} \subset \overline{y}$. On obtient l'autre inclusion de manière analogue.

Exemple 8

- ⋆ Sur $\mathbb{R}^*$, la relation « avoir le même signe » est une relation d'équivalence. Elle possède exactement deux classes d'équivalence : la classe $\mathbb{R}_+^*$ et la classe $\mathbb{R}_-^*$. L'ensemble quotient associé est donc l'ensemble $\{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*\}$.
- ⋆ Soit $\alpha > 0$. Les classes d'équivalences de $\mathbb{R}$ pour la relation de congruence modulo α sont les ensembles de la forme :

$$\alpha\mathbb{Z} + x = \left\{ \alpha k + x \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

où x décrit $[0, \alpha[$. Donc :

$$\mathbb{R}/(\text{mod } \alpha) = \left\{ \alpha\mathbb{Z} + x \,\middle|\, x \in [0, \alpha[\right\}$$

Démonstration $\star$ Soit $x \in \mathbb{R}$. La classe d'équivalence de x pour la relation de congruence modulo α est :

$$\overline{x} = \left\{x + k\alpha \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \alpha\mathbb{Z} + x$$

Il s'agit donc de montrer que les nombres réels $x \in [0, \alpha[$ permettent d'obtenir toutes les classes d'équivalence.

$\star$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\varepsilon \in [0, 1[$ tel que :

$$\frac{x}{\alpha} = \underbrace{\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor}_{\text{noté } k} + \varepsilon$$

et donc :

$$x = k\alpha + x'$$

en posant $x' = \varphi\alpha$. On a $x' \in [0, 1[$ et comme $x \equiv x'\ [\alpha]$, on a l'égalité $\overline{x} = \overline{x'}$. ■

L'ensemble des classes d'équivalences de E (pour la relation $\mathscr{R}$) forme une partition de l'ensemble E d'après le résultat suivant.

Proposition 3 Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors :

(i) pour tout $C \in E/\mathscr{R}$, on a $C \neq \varnothing$;

(ii) si $C, C' \in E/\mathscr{R}$ sont deux classes d'équivalences distinctes (c'est-à-dire si $C \neq C'$), alors $C \cap C' = \varnothing$;

(iii) enfin :

$$\bigcup_{C \in E/\mathscr{R}} C = E$$

Démonstration Pour tout $x \in E$, on note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x dans E pour la relation $\mathscr{R}$.

(i) Soit $C \in E/\mathscr{R}$. Par définition d'une classe d'équivalence, il existe donc $x \in E$ tel que $C = \overline{x}$. Par réflexivité de la relation d'équivalence, on a $x\mathscr{R}x$ donc $x \in C$. Ainsi, C est non vide.

(ii) Soient $C, C' \in E/\mathscr{R}$. Par définition d'une classe d'équivalence, il existe $x, y \in E^2$ tel que $C = \overline{x}$ et $C' = \overline{y}$. Raisonnons maintenant par contraposition. Supposons que $C \cap C' \neq \varnothing$, alors il existe $z \in E$ tel que $z \in C \cap C'$. D'après la remarque précédente, on a $C = \overline{z} = C'$.

(iii) Pour tout $x \in E$, on a $x \in \overline{x}$ donc $\displaystyle\bigcup_{C \in E/\mathscr{R}} C = E$. ■

Remarque : le théorème de la division euclidienne (chapitre « Arithmétique des entiers relatifs ») nous permettra de montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier relatif appartient à la classe d'équivalence, pour la relation de congruence modulo n, d'un et un seul élément de $[\![0, n-1]\!]$. Les classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ pour cette relation sont donc les ensembles $k + n\mathbb{Z}$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$. On note traditionnellement $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient formé de ces classes d'équivalence.