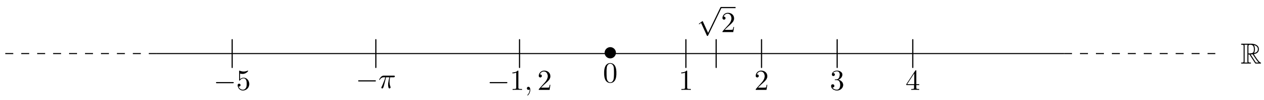
Nombres réels

I – L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

La construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ est hors-programme. On représente l'ensemble des nombres réels par une droite graduée.



1) Ordre naturel sur $\mathbb{R}$

On note $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_-^*$ les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

- ⋆ $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- ⋆ $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- ⋆ $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$
- ⋆ $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Remarques :

- ⋆ Si $x, y \in \mathbb{R}_+$, alors $x + y \in \mathbb{R}_+$.
- ⋆ On a $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

Deux nombres réels quelconques x et y peuvent être comparés à l'aide de la relation $\leqslant$.

Définition 1 (définition de la relation $\leqslant$) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On définit :

$$x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a toujours $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Notation : si $x \leqslant y$ et $x \neq y$, on écrit $x < y$.

Proposition 1 La relation $\leqslant$ est une *relation d'équivalence dans* $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'elle est :

- ⋆ *réflexive* : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$;
- ⋆ *antisymétrique* : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leqslant y$ et $y \leqslant z) \Longrightarrow x = y$
- ⋆ *symétrique* :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Longrightarrow x \leqslant z$$

Démonstration évident ■

2) Manipulations d'inégalités

La relation $\leqslant$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$:

Proposition 2 $\star$ Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant y \iff x+z \leqslant y+z$.

$\star$ Pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \leqslant & y \\ x' & \leqslant & y' \end{array}\right. \implies x + x' \leqslant y + y'$$

$\star$ Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$x \leqslant y \iff ax \leqslant ay \qquad \text{si } a > 0$$

et :

$$x \leqslant y \iff ax \geqslant ay \qquad \text{si } a < 0$$

Démonstration $\star$ Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+ \iff (y+z) - (x+z) \in \mathbb{R}_+ \iff x + z \leqslant y + z$$

On démontre les autres propriétés de manière analogue. ■

Remarque : attention, la réciproque à la deuxième propriété est fausse. Par exemple $1 + (-3) \leqslant 12 + (-13)$ et pourtant $-3 > -13$.

II – Valeur absolue

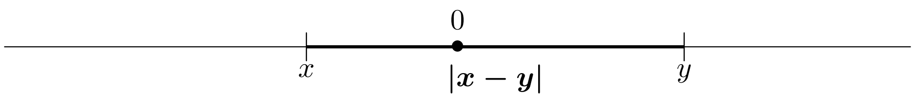
1) Définition

Définition 2 (valeur absolue) Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *valeur absolue de x*, notée $|x|$, le nombre réel :

$$|x| = \max(x, -x) = \left\{\begin{array}{ll} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array}\right.$$

Exemple 1 $|1| = 1$, $|0| = 0$, $|-\pi| = \pi$, $|3,1| = 3,1$

Interprétation géométrique : pour tous nombres réels x et y, $|x-y|$ représente la distance séparant les deux nombres réels x et y.



Par exemple, si $x < 0 < y$, alors $x - y < 0$ et donc $|x-y| = -(x-y) = y - x = y + (-x)$ est bien la distance entre x et y.

2) Propriétés

Proposition 3 (propriété de la valeur absolue) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

- ⋆ $|x| \geqslant 0$;
- ⋆ $|x| = 0 \iff x = 0$;
- ⋆ $|-x| = |x|$;
- ⋆ $x \leqslant |x|$ et $-x \leqslant |x|$;
- ⋆ $|xy| = |x| \times |y|$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$;
- ⋆ si $y \neq 0$, alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;
- ⋆ **Inégalité triangulaire :** $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Démonstration ⋆ évident

- ⋆ évident
- ⋆ Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par disjonction des cas suivant le signe de x.
  - **Premier cas :** on suppose que $x \geq 0$. Alors $|x| = x$ et $\max(x, -x) = x$ donc $|x| = \max(x, -x)$.
  - **Deuxième cas :** on suppose que $x < 0$. Alors $|x| = -x$ et $\max(x, -x) = -x$ donc $|x| = \max(x, -x)$.

  Dans les deux cas, on a bien $|x| = \max(x, -x)$.
- ⋆ On a $|x| = \max(x, -x)$. Comme $x \leq \max(x, -x)$ et $-x \leq \max(x, -x)$, on a $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.
- ⋆ D'après le point précédent, $|-x| = \max(-x, -(-x)) = \max(-x, x) = \max(x, -x) = |x|$.
- ⋆ facile
- ⋆ facile
- ⋆ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$.
  - On montre d'abord que $|x+y| \leq |x| + |y|$. On raisonne par disjonction des cas suivant le signe de $x+y$.
    - **Premier cas :** on suppose que $x + y \geq 0$. Alors $|x+y| = x+y$. Or $|x| = \max(x, -x)$ donc $x \leq |x|$. De même, $y \leq |y|$. On en déduit que $|x+y| \leq |x| + |y|$.
    - **Deuxième cas :** on suppose que $x+y < 0$. Alors $|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y)$. Or $|x| = \max(x, -x)$ donc $-x \leq |x|$. De même $-y \leq |y|$. On en déduit que $|x+y| \leq |x| + |y|$.

    Dans les deux cas, on a bien $|x+y| \leq |x| + |y|$.
  - Montrons maintenant que $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$. D'après ce qui précède,

    $$|x| = |y + (x-y)| \leq |y| + |x-y|$$

    De même,

    $$|y| = |x + (y-x)| \leq |x| + |y-x|$$

    Comme $|y-x| = |x-y|$, on a $|y| - |x| \leq |x-y|$. On a obtenu

    $$\begin{cases} |x| - |y| \leq |x-y| \\ |y| - |x| \leq |x-y| \end{cases}$$

    donc $\max\big(|x| - |y|, -(|x| - |y|)\big) \leq |x-y|$, c'est-à-dire $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$. ■

Remarques.

- ⋆ Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a aussi $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$. En effet, d'après l'inégalité triangulaire :

  $$\Big||x| - \underbrace{|-y|}_{=|y|}\Big| \leq |x-y| = |x + (-y)| \leq |x| + \underbrace{|-y|}_{=|y|}$$

- ⋆ Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On a l'équivalence :

  $$-y \leqslant x \leqslant y \iff |x| \leqslant y$$

La proposition suivante permet de résoudre des (in)équations avec des valeurs absolues.

Proposition 4 Soient x et y deux nombres réels et α un nombre réel positif. Alors

- $\star$ $|x| = \alpha \iff x = -\alpha$ ou $x = \alpha$;
- $\star$ $|x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$;
- $\star$ $|x| \geqslant \alpha \iff x \leqslant -\alpha$ ou $x \geqslant \alpha$;
- $\star$ $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x-a| \leqslant \alpha\right\} = [x-\alpha, x+\alpha]$ (segment de centre x et de rayon α).

Démonstration évident par définition de la valeur absolue ■

✎✎✎ **Exercice 1** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1. $|2x+3| \leqslant 1$;
2. $|x^2 - 2x| > 1$;
3. $|-x+3| \leqslant |2x-1|$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **Premier cas :** si $x \geq -\dfrac{3}{2}$, alors $2x+3 \geq 0$ et donc $|2x+3| = 1$. Ainsi,

$$|2x+3| = 1 \iff 2x+3 = 1 \iff x = -1$$

- **Deuxième cas :** si $x < -\dfrac{3}{2}$, alors $2x+3 < 0$ et donc $|2x+3| = -2x-3$. Donc

$$|2x+3| = 1 \iff -2x-3 = 1 \iff x = -2$$

L'ensemble de solutions est donc $\{-2, -1\}$.

III – Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

1) Tableaux de signes

Il faut savoir utiliser un tableau de signes (qui donne le signe d'un quotient ou d'un produit).

✎✎✎ **Exercice 2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x \leqslant x^2$;
2. $\dfrac{x-1}{-2x+3} > 1$.

2) Équations du second degré

Proposition 5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $x^2 = \alpha$ est :

- $\star$ $\varnothing$ si $\alpha < 0$;
- $\star$ $\{0\}$ si $\alpha = 0$;
- $\star$ $\left\{-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}\right\}$ si $\alpha > 0$.

Démonstration évident ■

Proposition 6 Soient a, b et c trois nombres réels avec a non nul. On considère l'équation $ax^2+bx+c = 0$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé discriminant de l'équation.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle et le trinôme est du signe de a.
- ⋆ Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une unique solution (appelée racine *double*), à savoir $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

  et le signe du trinôme est celui de a.
- ⋆ Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux racines réelles distinctes, à savoir :

$$x -_= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+)$$

  et le signe du trinôme à l'intérieur/extérieur des racines dépend du signe de a.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous allons utiliser la *forme canonique* du polynôme $ax^2 + bx + c$. On a d'abord :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

puis (on reconnaît le début d'une identité remarquable) :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

Soit

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ainsi :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

C'est une équation de la forme $X^2 = A$. D'après la proposition précédente :

- ⋆ Si $\Delta = 0$, alors $x + \dfrac{b}{2a} = 0$ d'où $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- ⋆ Si $\Delta > 0$, alors :

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$$

Les formules de factorisation sont une conséquence immédiate de l'identité remarquable :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Le signe s'obtient avec un tableau de signe dans le cas de deux racines distinctes. ■

✎✎✎ **Exercice 3** Déterminer le signe des trinômes $x^2 + 6x + 1$ et de $5x^2 + 10x - 2$ en fonction des valeurs de x.

3) Composition par une fonction strictement monotone dans une (in)équation

Le fait de composer par une application strictement monotone dans une (in)équation fournit une (in)équation équivalente.

Proposition 7 Soit f une fonction définie sur un intervalle I (non vide).

- ⋆ Si f est strictement monotone sur I, alors :

$$\forall a, b \in I, \qquad a = b \iff f(a) = f(b)$$

- ⋆ Si f est strictement croissante sur I, alors :

$$\forall a, b \in I, \qquad a \overset{<}{\leqslant} b \iff f(a) \overset{<}{\leqslant} f(b)$$

- ⋆ Si f est strictement décroissante sur I, alors :

$$\forall a, b \in I, \qquad a \overset{<}{\leqslant} b \iff f(b) \overset{<}{\leqslant} f(a)$$

Démonstration On démontre (par exemple) la deuxième propriété. Soit $a, b \in I$.

- ⋆ Si $a \leqslant b$, alors il est clair que $f(a) \leqslant f(b)$.
- ⋆ Réciproquement, supposons que $f(a) \leqslant f(b)$. Par l'absurde, si $a > b$, alors $f(a) > f(b)$ par stricte croissance de f sur I, ce qui contredit notre hypothèse. On a donc bien $a \leqslant b$. ■

Remarques :

- ⋆ Si on suppose seulement que f est croissante, alors on a seulement l'implication :

$$a \leqslant b \implies f(a) \leqslant f(b)$$

mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Il suffit de considérer une application constante (donc croissante) sur $\mathbb{R}$.

- ⋆ On résout des (in)équations en cherchant toujours à raisonner par équivalences.

✎✎✎ **Exercice 4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $e^{2x+1} = e^{x+5}$;
2. $e^{3x+4} > \dfrac{1}{e}$;
3. $e^{x^2+2x} > \dfrac{1}{e}$.

4) Autres type d'équations

Pour résoudre certaines équations plus compliquées (faisant intervernir des logarithmes ou des racines carrées par exemple), on commence par déterminer *le domaine de définition (ou de validité) de l'équation* afin de ne pas obtenir des valeurs erronées à la fin de la résolution.

Exemple 2 Résolution de l'équation $\sqrt{x-1} = x$.

✎✎✎ **Exercice 5** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $\sqrt{x+2} = x - 4$;
2. $\ln(2x-1) - \ln(x-3) = 0$;
3. $\ln(2x-1) - \ln(x-3) \leqslant 0$.

IV – Topologie de l'ensemble des nombres réels

1) Partie de $\mathbb{R}$ majorée, minorée, bornée

Définition 3 (majorant, minorant d'un ensemble) Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- ⋆ On dit que A est majoré si :

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A,\ a \leqslant M$$

Un tel nombre M est alors appelé *un* majorant dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble A. On dit aussi que M majore A.

- ⋆ On dit que A est minoré si :

$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ m \leqslant a$$

Un tel nombre m est appelé *un* minorant dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble A. On dit aussi que m minore A.

- ⋆ On dit que A est borné s'il est à la fois majoré et minoré, *i.e.* si :

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ m \leqslant a \leqslant M$$

Exemple 3 ⋆ 3 est un majorant de $]-\infty, 1]$, $\mathbb{N}$ n'admet pas de majorant, 1 est un majorant de $[0, 1[$

- ⋆ -1 est un minorant de $\mathbb{N}$, $]-\infty, 1]$ n'admet pas de minorant, 0 est un minorant de $[0, 1[$
- ⋆ $]0, 1[$ est une partie bornée, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas bornées

Remarques :

- ⋆ Lorsqu'une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée, il y a une infinité de majorants. En effet, si M majore A, alors pour tout élément de $[M, +\infty[$ majore A (propriété analogue pour « minorée »).
- ⋆ La négation de « A est majorée » est :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, a \in A,\ a > M$$

2) Maximum, minimum d'un ensemble

Définition 4 (maximum, minimum d'un ensemble) Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ⋆ Le nombre α est appelé *plus grand élément* (ou *maximum*) de A si :

$$\alpha \in A \qquad \text{et} \qquad \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha$$

On pose $\alpha = \max(A)$.

- ⋆ Le nombre α est appelé *plus petit élément* (ou *minimum*) de A si :

$$\alpha \in A \qquad \text{et} \qquad \forall a \in A,\ \alpha \leqslant a$$

Exemple 4 ⋆ L'ensemble $]0, 1]$ admet pour maximum 1 mais il n'admet pas de minimum.

Justification pour le minimum. Démontrons le en raisonnant par l'absurde. On suppose que A admet un plus petit élément noté β. Par définition, $0 < \beta \leqslant 1$ et pour tout $x \in]0, 1]$, on a $\beta \leqslant x$. Comme $\dfrac{\beta}{2} \in]0, 1]$, on a donc $\beta \leqslant \dfrac{\beta}{2}$ ce qui entraîne que $\beta \leqslant 0$. Ceci est absurde.

- ⋆ $\mathbb{R}$ n'a ni maximum, ni minimum (puisqu'il n'est ni majoré, ni minoré).
- ⋆ $[1, +\infty[$ a pour minimum 1 et n'a pas de maximum (puisqu'il n'est pas majoré).

Proposition 8 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- ⋆ Si A possède un plus grand élément, alors celui-ci est unique. On l'appelle alors *le* plus grand élément de A (noté $\max(A)$).
- ⋆ On dispose d'une propriété analogue pour le plus petit élément s'il existe.

Démonstration (pour le plus grand élément) Supposons qu'une partie A de $\mathbb{R}$ admette les nombres réels M et M' pour plus grands éléments. Par définition de M et M' :

- ⋆ on sait que $M \in A$ et que M' majore A donc $M \leqslant M'$;
- ⋆ de même, $M' \leqslant M$.

Par antisymétrie de la relation $\leqslant$, on peut conclure que $M = M'$. ■

Exemple 5 $\max(]0,1]) = 1$

3) Borne supérieure, borne inférieure d'un ensemble

Lorsqu'un ensemble est majoré, on souhaite traduire mathématiquement la notion de frontière supérieure de cet ensemble, notamment quand il n'admet pas de plus grand élément comme l'ensemble $A = [0,1[$.

Définition 5 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- ⋆ S'il existe, le plus petit majorant de A est appelé la borne supérieure de A. Elle est notée $\sup(A)$.
- ⋆ S'il existe, le plus grand minorant de A est appelé la borne inférieure de A. Elle est notée $\inf(A)$.

Remarques :

- ⋆ La différence essentielle entre plus grand élément et borne supérieure, c'est que la borne supérieure, quand elle existe, n'appartient pas nécessairement à l'ensemble considéré.
- ⋆ Lorsqu'elle existe, la borne supérieure est unique (puisqu'il s'agit d'un plus petit élément).

Exemple 6 Justifions que la borne supérieure de $[0,1[$ est 1.

Pour commencer, 1 majore $[0,1[$ (ce qui prouve au passage l'existence de la borne supérieure de $[0,1[$). Pour montrer que 1 est la borne supérieure de $[0,1[$, il suffit alors de montrer qu'aucun nombre réel strictement inférieur à 1 ne majore $[0,1[$. Soit $x \in]-\infty, 1[$.

— Si $x < 0$, alors x ne majore pas $[0,1[$ car, par exemple $x < 0$ et $0 \in [0,1[$.

— Si $x \in [0,1[$, alors on a $x < \dfrac{x+1}{2}$ et $\dfrac{x+1}{2} \in [0,1[$ donc x ne majore pas $[0,1[$.

On peut donc conclure que $1 = \sup([0,1[)$.

Théorème 1 (max/min implique sup/inf) Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- ⋆ Si A possède un plus petit élément, alors A possède une borne supérieure et :

$$\sup(A) = \max(A)$$

- ⋆ On dispose d'un résultat analogue pour le plus petit élément et la borne inférieure.

Démonstration Notons $\mathscr{M}$ l'ensemble des majorant de A. Il s'agit de montrer que $\mathscr{M}$ possède un plus petit élément, et que celui-ci est $\max(A)$.

— On a $\max(A) \in \mathscr{M}$ puisque $\max(A)$ majore A.

— Comme $\max(A) \in A$ (par définition d'un plus grand élément), on a :

$$\forall m \in \mathscr{M}, \qquad \max(A) \leqslant m$$

donc $\max(A)$ minore $\mathscr{M}$.

Ainsi, A possède une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$. ■

En général, l'existence des bornes inférieure et supérieure dans la définition précédente sont une conséquence de la propriété suivante, qui est une conséquence de la construction de $\mathbb{R}$ (et qui est hors programme).

4) Propriétés de la borne supérieure

Axiome 1 (de la borne supérieure) ⋆ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

⋆ Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

✎✎✎ **Exercice 6** Justifier que l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Proposition 9 (caractérisation de la borne supérieure/inférieure) Soit A une partie (non vide) de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a \end{cases} \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha \\ \\ \exists\, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \end{cases}$$

et

$$\alpha = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ \beta \leqslant a \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ a < \beta + \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \geqslant \alpha \\ \\ \exists\, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \end{cases}$$

Démonstration (pour la borne supérieure) Les caractérisations séquentielles seront démontrées dans le chapitre sur les suites (chapitre 12). On raisonne par double implication.

($\Longrightarrow$) On suppose que $\alpha = \sup(A)$. Alors α est un majorant de A donc :

$$\forall a \in A,\ a \leqslant \alpha$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme α est le plus petit des majorants de A, $\alpha - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. Il existe donc $a \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < a$.

($\Longleftarrow$) Supposons maintenant que $\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$. Montrons que $\alpha = \sup(A)$. Alors α est un majorant de A. Montrons que c'est le plus petit. Si $M < \alpha$ était un majorant de A, alors en posant $\varepsilon = \alpha - M > 0$, on aurait l'existence d'un élément a de A tel que $\alpha - \varepsilon = M < a$, ce qui contredit la définition de M. ■

✎✎✎ **Exercice 7**

1. Déterminer $\inf(\mathbb{Q}_+^*)$.
2. Déterminer les bornes inférieures de A (*cf.* exercice précédent).

V – Partie entier d'un nombre réel

1) Partie entière d'un réel

Définition 6 (partie entière) Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif, appelé *partie entière de* x et notée $\lfloor x \rfloor$ tel que :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Donc $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Remarque. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$.

Exemple 7 $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$ $\lfloor 1,2 \rfloor = 1$ $\lfloor -5 \rfloor = -5$ $\lfloor -1,2 \rfloor = -2$

✎✎✎ **Exercice 8** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = x$;
2. l'inéquation $\lfloor 3x + 1 \rfloor > 1$.

✎✎✎ **Exercice 9** Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x - x_n| < 10^{-n}$$

2) Un résultat de « densité »

Proposition 10 Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$. Alors :

- ⋆ il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $x < \alpha < y$;
- ⋆ il existe $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < \beta < y$.

On dit que les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (ensemble des nombres irrationnels) sont *denses* dans $\mathbb{R}$.

Démonstration Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$.

- ⋆ Posons $\varepsilon = y - x > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \times 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire :

$$0 < \frac{1}{q} < \varepsilon = y - x$$

Par ailleurs, notons p la partie entière de $qx \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p+1}{q}$$

Posons alors $\alpha = \dfrac{p+1}{q} \in \mathbb{Q}$. On a $x < \alpha$ et :

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y$$

- ⋆ D'après le point précédent, il existe un rationnel r non nul compris entre $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{b}{\sqrt{2}}$. L'irrationnel $r\sqrt{2}$ vérifie les propriétés requises. ■

Remarque : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, on a donc $]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ et $]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$.

VI – Qu'est-ce qu'un intervalle ?

Définition 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. On appelle *segment* d'extrémités a et b, noté $[a, b]$, l'ensemble :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$$

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes les valeurs intermédiaires. Plus précisément :

Définition 8 (intervalle) Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un *intervalle* si :

$$\forall a, b \in I, \qquad a \leqslant b \Longrightarrow [a, b] \subset I$$

Remarque : l'ensemble vide $\varnothing$ est un intervalle.

Exemple 8 ⋆ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Alors $]a, b]$ est un intervalle.

Justification. Soit en effet $x, y \in]a, b]$ tel que $x \leqslant y$. Pour tout $t \in [x, y]$, on a :

$$a < x \leqslant t \leqslant y \leqslant b \qquad \text{donc} \qquad t \in]a, b]$$

⋆ Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas des intervalles.

Théorème 2 Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les ensembles de la forme $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ et $\mathbb{R}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$).

Démonstration Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$.

⋆ Si I est de l'un des neuf types d'ensembles annoncés, alors on montre facilement que I est un intervalle.

⋆ Réciproquement, supposons que I soit un intervalle de $\mathbb{R}$. On distingue plusieurs cas.

— **Premier cas :** I n'est ni majoré, ni minoré.
Alors $I = \mathbb{R}$.

— **Deuxième cas :** I est majoré et minoré.
Alors I admet une borne supérieure b et une borne inférieure a. Supposons que $a \in I$ et $b \in I$. Montrons que $I = [a, b]$. D'abord, $[a, b] \subset I$ car I est un intervalle. Ensuite, pour tout $x \in I$, on a $a \leqslant x \leqslant b$ puisque a minore I et b majore I.
Supposons que $a \in I$ et $b \notin I$. Montrons que $I = [a, b[$.
Soit $x \in [a, b[$. On a $x < b = \sup(X)$ donc x ne majore pas I. Ainsi, il existe $b' \in I$ tel que $a \leqslant x \leqslant b'$. Mais alors $[a, b'] \subset I$ et donc $x \in I$. On a donc $[a, b[\subset I$. De plus, pour tout $x \in I$, on a $a \leqslant x \leqslant b$ par définition de a et b et, puisque $b \notin I$, on a $x < b$. Ainsi, $I \subset [a, b[$.

On démontre les autres cas de manière analogue. ■