# Sommes et produits de nombres

**Notation.** Si $p, q \in \mathbb{N}$ sont tels que $p \leqslant q$, alors on pose :

$$[\![p, q]\!] = \{p, p+1, \dots, q\} \qquad \text{(intervalle d'entiers)}$$

Par exemple, $[\![0, 3]\!] = \{0, 1, 2, 3\}$.

Le but de ce chapitre est d'apprendre à manipuler deux symboles, à savoir $\sum$ (somme) et $\prod$ (produit).

## I – Coefficients binomiaux

### 1) Factorielle d'un entier positif

**Définition 1** Soit $n$ un entier naturel. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle factorielle $n$ le nombre noté $n\,!$ défini par

$$n\,! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Par convention, $0\,! = 1$.

**Remarque.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $(n+1)\,! = (n+1)\,n\,!$

**Exemple 1 (calcul des premières factorielles)** On a $1\,! = 1$, $2\,! = 2$, $3\,! = 6$, $4\,! = 24$, $5\,! = 120$.

✎✎✎ **Exercice 1** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$. Simplifier au maximum les quantités suivantes :

$$a_n = \frac{(n+1)\,!}{(n-3)\,!} \qquad b_n = \frac{(n\,!)^2}{(n-2)\,!(n+1)\,!} \qquad c_n = \frac{2^{n+1} n\,!}{2^{2n}(n-2)\,!}$$

### 2) Notion de coefficient binomial

**Définition 2** Soit $n$ un entier relatif. Pour tout entier relatif $k$, on définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \text{ ou } k < 0 \text{ ou } n < 0 \end{cases}$$

**Exemple 2** $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{10}{3} = 120$, $\binom{5}{4} = 5$

**Proposition 1 (propriétés des coefficients binomiaux)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

- $\star$ On a $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$, $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$ et :

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- $\star$ **Symétrie des coefficients binomiaux :** $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$
- $\star$ **Formule sans nom :** $\dbinom{n+1}{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1}\dbinom{n}{k}$
- $\star$ **Triangle de Pascal :** si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k}$

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

**Démonstration** Il suffit d'écrire explicitement les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n\,!}{(n-k)\,!(n-(n-k))\,!} = \frac{n!}{(n-k)\,!k\,!} = \binom{n}{k}$$

puis

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)\,!}{(k+1)\,!(n-k)\,!} = \frac{n+1}{k+1} \times \frac{n\,!}{k!(n-k)\,!} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

et :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n\,!}{(k-1)\,!(n-k+1)\,!} + \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!} \\
&= \frac{k}{k} \times \frac{n\,!}{(k-1)\,!(n-k+1)\,!} + \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!} \times \frac{n-k+1}{n-k+1} \\
&= \frac{k\,n\,!}{k\,!(n+1-k)\,!} + \frac{(n-k+1)\,n\,!}{k\,!(n+1-k)\,!} \\
&= \frac{(n+1)\,!}{k\,!(n+1-k)\,!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

■

# II – Sommes *simples*

## 1) Définition

**Définition 3 (somme simple)** Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant q$ et $a_p, a_{p+1}, \dots, a_q \in \mathbb{R}$. La somme, dite *en extension* $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$ se note $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k$, *i.e.* :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$$

**Remarque.** La variable $k$ est dite *muette*. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre. Par exemple,

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=p}^{q} a_j = \sum_{\ell=p}^{q} a_\ell$$

**Exemple 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- ⋆ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n$
- ⋆ $\displaystyle a_2 + a_4 + a_8 + \cdots + a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$
- ⋆ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -\ln(n+1)$

**Remarque (généralisation de la définition).** Si $A$ est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$, alors on note $\displaystyle\sum_{k\in A} a_k$ la somme de tous les nombres $a_k$ pour lesquels $k \in A$. Par exemple :

$$\sum_{k\in[\![1,3]\!]\cup[\![5,8]\!]} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

Par convention, on pose $\displaystyle\sum_{k\in\varnothing} a_k = 0$.

### 2) Propriétés de la somme

Dans la propriété suivante, on peut remplacer l'indice 0 par un indice $p \leqslant n$ quelconque.

**Proposition 2 (propriétés algébriques de la somme)** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- ⋆ **linéarité de la somme :**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

- ⋆ **relation de Chasles** :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!], \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$$

- ⋆ **changement d'indice :**

$$\sum_{j=0}^{n} a_{j+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i, \qquad \sum_{j=0}^{n} a_{j+2} = \sum_{i=2}^{n+2} a_i, \qquad \textit{etc.}$$

  On dit qu'on a effectué le changement d'indice $i = j + 1$ (ou $j = i + 2$).

- ⋆ **Symétrie de la somme :**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$$

**Démonstration** ⋆ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k + b_k) &= (\lambda a_0 + b_0) + (\lambda a_1 + b_1) + \cdots + (\lambda a_n + b_n) \\ &= (\lambda a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) \qquad \text{(la somme est commutative dans } \mathbb{R}) \\ &= \lambda(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) \qquad \text{(on met } \lambda \text{ en facteur)} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k\end{aligned}$$

⋆ Il suffit d'écrire les sommes en extension.

⋆ On a :

$$\sum_{j=0}^{n} a_{j+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

⋆ Il suffit d'écrire les sommes en extension. ■

**Attention :**

⋆ Il n'existe pas de formule pour un sommant qui s'écrit comme un produit ou un quotient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} b_k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$$

⋆ Dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k}$, on ne peut pas effectuer le changement d'indice $i = 2k$.

**Exemple 4** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

⋆ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} k$ ;

⋆ $\displaystyle a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k$ ;

⋆ $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

## 3) Sommes usuelles à connaître

**Proposition 3 (somme à connaître)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

⋆ On a :

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

Plus généralement, si $p \in [\![0, n]\!]$, alors :

$$\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$$

⋆ On a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

★ **Somme des termes d'une suite géométrique**
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Plus généralement, on a si $p \in [\![0, n]\!]$ :

$$\sum_{k=p}^{n} x^k = x^p \times \frac{1 - x^{n-p+1}}{1 - x}$$

★ **Somme télescopique**
On a :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

**Démonstration** ★ Soit $p \in [\![0, p]\!]$. Alors (on écrit la somme en extension) :

$$\sum_{k=p}^{n} 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-p+1 \text{ termes}} = (n - p + 1) \times 1 = n - p + 1$$

Les deux premières sommes s'obtiennent en prenant $p = 0$ et $p = 1$ respectivement.

★ On écrit la somme en extension

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = n + (n-1) + \cdots + 1$$

et en sommant les deux égalités, il vient

$$2\,\mathrm{S}_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1)$$

d'où le résultat.

Démontrons que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

- si $n = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ tandis que $\dfrac{1 \times (1+1)(2+1)}{6} = 1$ donc la proposition $\mathscr{P}_1$ est vraie.
- soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la proposition $\mathscr{P}_n$ est vérifiée. Montrons qu'elle reste vérifiée au rang $n+1$. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= (n+1) \times \frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

– Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie, ce qui établit le résultat.

⋆ Soit $p \in [\![0,n]\!]$. On va démontrer que $(1-x)\sum_{k=p}^{n} = x^p\big(1-xn-p+1\big)$. On a :

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=p}^{n}x^k &= \sum_{k=p}^{n}x^k - \sum_{k=p}^{n}x^{k+1}\\ &= \sum_{k=p}^{n}x^k - \sum_{j=p+1}^{n+1}x^j \qquad \text{(en faisant le changement de variables } j=k+1\text{)}\\ &= x^p - x^{n+1}\end{aligned}$$

d'où la formule annoncée.

⋆ Il suffit d'écrire la somme en extension. ■

**Remarque :** la valeur de la première somme nous dit essentiellement que dans l'intervalle $[\![p,n]\!]$, il y a $n-p+1$ entiers.

✎✎✎ **Exercice 2** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Calculer les sommes :

$$S = \sum_{k=1}^{n}(-2), \quad T = \sum_{\ell=2}^{n}\frac{(-1)^{\ell+1}}{3^{\ell+2}}, \quad U = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right), \quad V = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{3k} \quad \text{et} \quad W = \sum_{k=1}^{n}(6k^2-2k)$$

## 4) Formule du binôme de Newton

On sait que :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \qquad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad \text{et} \qquad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

La formule du binôme de Newton généralise ces formules.

**Proposition 4 (formule du binôme de Newton)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

**Démonstration** On démontre cette formule à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Pour tout entier naturel $n$, notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$ ».

⋆ Si $n=0$, alors $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} = \binom{0}{0}a^0b^0 = 1$ donc la proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie.

⋆ Supposons que la proposition $\mathscr{P}_n$ soit vraie et démontrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^{j} b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}a^0 b^{n+1-0}}_{=\binom{n+1}{0}a^0b^{n+1-0}} + \sum_{k=1}^{n}\Bigg[\underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}_{=\binom{n+1}{k}}\Bigg]a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{n}a^{n+1}b^0}_{=\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1} - k
\end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Finalement, pour tout entier naturel $n$, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie, ce qui établit le résultat. ■

**Remarque :** le triangle de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour un exposant $n \in \mathbb{N}$ donné. Par exemple, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \qquad \text{et} \qquad (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

✎✎✎ **Exercice 3** Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}, \qquad T = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}2^k, \qquad U = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}2^k \qquad \text{et} \qquad V = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2}{3^{k+1}}$$

### 5) Factorisation de $a^n - b^n$

On sait que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

La propriété suivante généralise cette identité.

**Proposition 5 (identité remarquable)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}$$

**Démonstration** On développe le produit $(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ :

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= a\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - b\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \qquad \text{(en posant } j=k+1\text{)} \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

■

✎✎✎ **Exercice 4** Pour $a, b, x \in \mathbb{R}$, factoriser les expressions $a^2-b^2$, $x^3-1$ et $a^4-b^4$.

## III – Sommes doubles

### 1) Sommes *rectangulaires*

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On considère une famille de nombres réels $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ cette famille de nombres réels que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau à $m$ lignes et $n$ colonnes où le nombre réel $a_{i,j}$ est situé sur la $i^{\text{eme}}$ ligne et sur la $j^{\text{eme}}$ colonne :

| | 1 | 2 | ... | $j$ | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | ... | $a_{1,j}$ | ... | $a_{1,n}$ |
| 2 | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | ... | $a_{2,j}$ | ... | $a_{2,n}$ |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $i$ | $a_{i,1}$ | $a_{i,2}$ | ... | $a_{i,j}$ | ... | $a_{i,n}$ |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $m$ | $a_{m,1}$ | $a_{m,2}$ | ... | $a_{m,j}$ | ... | $a_{m,n}$ |

**Définition 4**

- La somme S des éléments de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est notée $\mathrm{S} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$.
- Lorsque $m = n$, on note aussi cette somme $\mathrm{S} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.

Le calcul d'une somme double se ramène toujours au calcul de deux sommes simples.

**Théorème 1** Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ et pour toute famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ de nombres complexes, on a :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}$$

**Démonstration** C'est immédiat : on effectue une sommation par ligne pour la première somme, et par colonne pour la seconde. ■

✎✎✎ **Exercice 5** Calculer $\mathrm{S} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} (i+j)$.

**Solution.** On sait que $\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ et par linéarité de la somme :

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{m}\left(i\sum_{j=1}^{n}1 + \sum_{j=1}^{n}j\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(n\,i + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

puis, à nouveau en utilisant la linéarité de la somme :

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{m}\left(n\,i + \frac{n(n+1)}{2}\right) = n\sum_{i=1}^{m} i + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{m}1 = \frac{nm(m+1)}{2} + \frac{nm(n+1)}{2} = \frac{nm(n+m+2)}{2}$$

**Remarque :** si le terme général $a_{i,j}$ s'écrit sous la forme $a_{i,j} = b_i \times c_j$, alors la somme double correspondante est égale à :

$$\mathrm{S} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)$$

Par exemple :

$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} i2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1}-1)$$

### 2) Sommes *triangulaires*

**Supposons maintenant que $m = n$.** On veut ici calculer la somme des nombres réels $a_{i,j}$ mais seulement pour les indices $i$ et $j$ vérifiant $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. On peut noter $(a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ la famille correspondante. On peut la visualiser à l'aide du tableau suivant :

| | 1 | 2 | $\dots$ | $i$ | $\dots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $\dots$ | $a_{1,i}$ | $\dots$ | $a_{1,n}$ |
| 2 | | $a_{2,2}$ | $\dots$ | $a_{2,i}$ | $\dots$ | $a_{2,n}$ |
| | | | $\ddots$ | | | |
| $i$ | | | | $a_{i,i}$ | $\dots$ | $a_{i,n}$ |
| $\vdots$ | | | | | $\ddots$ | |
| $n$ | | | | | | $a_{n,n}$ |

**Définition 5** La somme S des éléments de la famille $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ est $\mathrm{S} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$.

On dispose du résultat suivant.

**Théorème 2** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes. Alors

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$$

**Démonstration** Il s'agit encore une fois de sommer soit par rapport aux lignes, soit par rapport aux colonnes. La somme des éléments présents sur la ligne $i \in [\![1, n]\!]$ est :

$$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_n = \sum_{k=i}^{n} a_{i,j},$$

d'où la première formule annoncée. ■

✎✎✎ **Exercice 6** Calculer la somme $\mathrm{S} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 3\,i$.

**Solution.** D'après le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 3i = \sum_{i=1}^{n} 3i \sum_{j=i}^{n} 1 &= \sum_{i=1}^{n} 3i(n-i+1)\\ &= 3\sum_{i=1}^{n}\left(in - i^2 + i\right)\end{aligned}$$

puis, en utilisant la linéarité de la somme, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{S} = 3n\sum_{i=1}^{n} i - 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i &= 3n\frac{n(n+1)}{2} - 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

**Remarque :** de la même manière, on a

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}$$

# IV – Produits

On peut adapter ce qu'on a vu sur les sommes simples pour les produits finis de nombres réels.

## 1) Définition

**Définition 6** Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$ et $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_q$ des nombres réels. Le produit de ces nombres (dit *en extension*) $a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_q$ est noté $\prod_{k=p}^{q} a_k$, *i.e.* :

$$\prod_{k=p}^{q} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_q$$

**Remarque :** plus généralement, si $A$ est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$, on note $\prod_{k\in A} a_k$ le produit des nombres $a_k$ pour $k \in A$. Par exemple :

$$\prod_{k\in[\![1,2]\!]\cup[\![5,8]\!]} a_k = a_1 \times a_2 \times a_5 \times a_6 \times a_7 \times a_8$$

Par convention, on pose $\prod_{k\in\varnothing} a_k = 1$.

**Exemple 5** $\star$ $a_2a_4\dots a_{2n} = \prod_{k=1}^{n} a_{2k}$

$\star$ $\prod_{k=1} n\, 3 = 3^n$

✎✎✎ **Exercice 7** Calculer les produits suivants :

$$P = \prod_{k=1} n\,(2k) \qquad \text{et} \qquad Q = \prod_{\ell=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\ell}\right) \qquad (\textit{produit telescopique})$$

**Remarque (lien entre produit et somme).** si $a_0,\dots,a_n$ sont des nombres réels strictements positifs, alors

$$\sum_{k=0}^{n}\ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$$

## 2) Propriétés

**Proposition 6** 1. Soient $p,q \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant q$. Soient $a_p,\dots,a_q,b_p,\dots,b_q$ des nombres réels. Alors :

$$\left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)\left(\prod_{k=p}^{q} b_k\right) = \prod_{k=p}^{q}(a_kb_k)$$

2. Soient $p,q,m \in \mathbb{N}^3$ tel que $p \leqslant m < q$ et $a_p,\dots,a_q$ des nombres réels. Alors :

$$\left(\prod_{k=p}^{m} a_k\right)\left(\prod_{k=m+1}^{q} a_k\right) = \prod_{k=p}^{q} a_k$$

**Démonstration** Il suffit d'écrire les produits en extension et, pour la première formule, de regrouper les termes.∎

## 3) Quelques produits à connaître

**Proposition 7** 1. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{k=1}^{p} x = x^p$ et plus généralement, pour tout $p,q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$, on a $\prod_{k=p}^{q} x = x^{q-p+1}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{k=1}^{n} k = n\,!$

**Démonstration** Il suffit d'expliciter les produits. ■

✎✎✎ **Exercice 8** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer le produit $\mathrm{S} = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.