

Eléments de théorie des ensembles

I – Généralités sur les ensembles

1) Notion d'ensemble

Définition 1 (notion d'ensemble) On appelle *ensemble* toute collection non ordonnée d'objets, appelés *éléments*.

Soit E un ensemble non vide. On écrit :

- $x \in E$ si x appartient à l'ensemble E ;
- $x \notin E$ si x n'appartient pas à l'ensemble E .

Remarques. Dans l'écriture $E = \{1, 2, 3\}$, l'ordre des éléments n'a aucune importance. Ainsi, $E = \{2, 1, 3\}$ ou $E = \{3, 2, 1\}$.

Axiome/définition 1 (ensemble vide \emptyset) Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément. On l'appelle *ensemble vide* et on le note \emptyset .

Exemple 1 $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} = \emptyset$

Remarque : il existe plusieurs manières de définir un ensemble. On peut :

- ★ lister les éléments de l'ensemble :

Exemple 2 $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ou $F = \{-1, 1\}$ ou $G = \{x^4, x^6, x^8, x^{10}\}$

- ★ caractériser l'ensemble par une propriété (on dit que l'on écrit l'ensemble *en compréhension*) :

Exemple 3 $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 5\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ ou :

$$G = \{x^{2k} \mid k \in \llbracket 2, 5 \rrbracket\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \{2, 3, 4, 5\} \mid y = x^{2k}\}$$

2) Ensembles et inclusion

Définition 2 (inclusion) Soient E et F deux ensembles. On dit que F est un *sous-ensemble* de E (ou que F est une *partie* de E), et on note $F \subset E$, si tout élément de F est aussi un élément de E .

Remarques.

★ On a donc $F \subset E \iff (\forall x, x \in F \implies x \in E)$.

★ Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \subset E$. En effet, l'assertion :

$$\forall x, x \in \emptyset \implies x \in E$$

est vraie puisque la proposition $\mathcal{P} : x \in \emptyset$ est fausse.

Exemple 4 $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 2\}$ et $G = \{3, 4\}$.

- L'ensemble F est constitué des entiers 1 et 2 et ces deux entiers appartiennent à l'ensemble E . On en conclut que F est un sous-ensemble de E (c'est-à-dire $F \subset E$).
- Par contre, $4 \in G$, et $4 \notin E$. Donc G n'est pas une partie de E (c'est-à-dire $G \not\subset E$).

La relation d'inclusion vérifie les propriétés élémentaires suivantes.

Proposition 1 (\subset est une relation d'ordre) La relation \subset est :

★ *réflexive* c'est-à-dire : pour tout ensemble A , on a $A \subset A$;

★ *antisymétrique* c'est-à-dire : pour tous ensembles A et B , alors :

$$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \implies A = B$$

★ *transitive* c'est-à-dire : pour tous ensembles A , B et C , alors :

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \implies A \subset C$$

On dit que \subset est une *relation d'ordre*.

Démonstration immédiat ■

Remarque : si A et B sont deux ensembles, on n'a pas nécessairement :

$$A \subset B \text{ ou } B \subset A$$

Par exemple, dans \mathbb{N} , il suffit de considérer les sous-ensembles $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$.

On dit que la relation d'ordre \subset n'est pas *totale*.

3) Comment montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre ?

Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F , on considère un élément x quelconque de E et on démontre qu'il appartient à F . Ce qui a été démontré pour cet élément x étant valable quelque soit le choix de l'élément de E , on en déduit que tous les éléments de E appartiennent à F .

Rédaction. Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. On démontre que $x \in F$. On conclut : $E \subset F$.

 **Exercice 1** On considère les ensembles :

$$E = \{x, y \in \mathbb{R} \mid 2x - y = 1\} \quad \text{et} \quad F = \{(t + 1, 2t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $F \subset E$.

4) Comment démontrer que deux ensembles sont égaux ?

La propriété d'antisymétrie de la relation \subset nous donne une méthode pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux. En effet, il suffit de montrer que $E \subset F$ et $F \subset E$. **On dit qu'on raisonne par double inclusion.**

Rédaction. Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. On démontre que $x \in F$. On a donc : $E \subset F$. Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$. On démontre que $x \in E$. On a donc : $F \subset E$ Conclusion : $E = F$

✍✍✍ **Exercice 2** Montrer que les ensembles E et F de l'exercice précédent sont égaux.

5) Les ensembles de nombres à connaître

- ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 101, \dots\}$
- ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, \}$
- ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2013, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ou encore :

$$\mathbb{Z} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$$

- ensemble des nombres relatifs $\mathbb{Q} = \{\text{quotients de deux entiers relatifs}\} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$
- ensemble des nombres réels \mathbb{R} (et \mathbb{R}^* , \mathbb{R}_+ , \mathbb{R}_+^* , etc.)
- ensemble des nombres complexes \mathbb{C} ($i^2 = -1$)

On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

II – Opérations sur les parties d'un ensemble

1) Intersection, réunion, complémentaire et différence

Définition 3 (intersection, réunion, complémentaire et différence) Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

1. L'*intersection* de A et de B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B .

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

2. L'*union* (ou *réunion*) de A et de B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B (c'est-à-dire qui appartiennent à A , à B ou aux deux à la fois).

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

3. Le *complémentaire* de A dans E , noté \bar{A} ou cA ou $E \setminus A$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

4. On appelle *différence* de A et B , notée $A \setminus B$ le sous-ensemble de E suivant :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Exemple 5 — $\{1, 2\} \cup \{2, 7\} = \{1, 2, 7\}$

— $\{1, 2\} \cap \{2, 7\} = \{2\}$

— $\{1, 3\} \cap \{2, 7\} = \emptyset$

$$- \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 4, 5\} = \{2, 3\}$$

Remarques.

Si A, B et C sont trois sous-ensembles d'un ensemble E , alors on a :

- ★ $A \setminus A = \emptyset, A \setminus \emptyset = A;$
- ★ $A \setminus B = A \cap \overline{B};$
- ★ $A \cap B \subset A \subset A \cup B;$
- ★ $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases} \implies A \cup B \subset C;$
- ★ $\begin{cases} A \subset B \\ A \subset C \end{cases} \implies A \subset B \cap C;$
- ★ $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A;$
- ★ $A \cap E = A$ et $A \cup E = E.$

 **Exercice 3** Dans \mathbb{R} , on considère les sous-ensembles $A = [0, 1[$ et $B = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Déterminer $A \setminus B$, $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

On peut généraliser la réunion et l'intersection à une famille de parties d'un ensemble. Soient E un ensemble, I une famille d'indice (par exemple $I = \llbracket 0, 10 \rrbracket$ ou $I = \mathbb{N}$) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E (ce qui signifie que : $\forall i \in I, A_i \subset E$).

1. On définit la réunion de la famille $(A_i)_{i \in I}$, notée $\bigcup_{i \in I} A_i$, par :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

2. On définit l'intersection des ensembles $(A_i)_{i \in I}$, notée $\bigcap_{i \in I} A_i$, par :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

 **Exercice 4** Calculer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right[$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right]$.

Solution. On trouve $[0, 1[$ puis $\{0\}$.

Les propriétés des opérations \cup, \cap , du complémentaire et de la différence sont les suivantes.

Proposition 2 (propriétés des opérations $\cup, \cap, -$ et \setminus) Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E .

1. Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.
2. **Idempotence :** $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
3. **Commutativité :** $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
4. **Associativité :** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. **Distributivité de l'union sur l'intersection :** $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
6. **Distributivité de l'intersection sur l'union :** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
7. **Involution :** $\overline{\overline{A}} = A$.
8. **Les lois de De Morgan :**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

et :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad \text{et} \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Démonstration (de l'associativité de \cup sur \cap et de la première loi de De Morgan)
 lité $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Soit $x \in E$. Alors

1. Montrons l'éga-

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } x \in C \\ &\iff (x \in A \text{ ou } x \in C) \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

Ceci montre donc que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

2. Montrons que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff \text{non } (x \in A \cap B) \\ &\iff \text{non } (x \in A \text{ et } x \in B) \\ &\iff \text{non } (x \in A) \text{ ou } \text{non } (x \in B) \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

 **Exercice 5** Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Simplifier l'ensemble suivant :

$$X = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

 **Exercice 6** Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E . Montrer que

$$\begin{cases} A \cup C \subset B \cup C \\ A \cap C \subset B \cap C \end{cases} \iff A \subset B$$

 **Exercice 7** Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E . Montrer l'équivalence

$$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$$

2) Produit cartésien d'ensembles

Définition 4 (produit cartésien d'ensembles) Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et de F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples constitués d'un élément de E et d'un élément de F .

$$E \times F = \{(e, f) \mid e \in E \text{ et } f \in F\}$$

ATTENTION : l'ordre des coordonnées est important ! Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , le point de coordonnées $(1, 2)$ est différent du point de coordonnées $(2, 1)$.

Exemple 6 1. Soient $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$. Alors

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

2. Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$. Alors

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

On peut généraliser le produit cartésien à une famille finie d'ensembles.

Définition 5 (produit cartésien d'une famille finie d'ensembles) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ (i.e. $n \geq 2$) et E_1, \dots, E_n des ensembles.

★ On définit le produit cartésien de la famille d'ensembles E_1, \dots, E_n par

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(e_1, \dots, e_n) \mid e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n\}$$

★ Dans le cas où $E_1 = \dots = E_n = E$, on pose :

$$\underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$$

Un élément de E^n est alors appelé un n -uplet ou une n -liste d'éléments de E .

Exemple 7 Un élément de \mathbb{R}^3 est un triplet (x, y, z) où $x, y, z \in \mathbb{R}$. Par exemple, $(1, \pi, 1) \in \mathbb{R}^3$.

III – Ensemble des parties d'un ensemble

Commençons par définir l'ensemble des parties d'un ensemble.

Définition 6 (ensemble $\mathcal{P}(E)$) Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties de l'ensemble E* , l'ensemble noté $\mathcal{P}(E)$, défini par :

$$\mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

Autrement dit, pour tout ensemble X , on a l'équivalence :

$$X \in \mathcal{P}(E) \iff X \subset E$$

- ★ Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont donc des ensembles (ce sont les sous-ensembles de E).
- ★ Quelque soit l'ensemble E , on a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$ (car $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$).

- Exemple 8**
1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
 2. $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 3. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{0, 1\}$ est

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$$

4. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ est

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

IV – Recouvrement disjoint et partition d'un ensemble

Définition 7 (recouvrement disjoint, partition) Soient E un ensemble, I un ensemble non vide d'indices (fini ou infini) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E . On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un *recouvrement disjoint* de E si :

$$\star \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset;$$

$$\star \bigcup_{i \in I} A_i = E.$$

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E s'il cette famille est un recouvrement disjoint de E et si :

$$\star \forall i \in I, A_i \neq \emptyset.$$

Exemple 9 — $([n, n + 1[)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une partition de \mathbb{R} ;
— $([-n, n])_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une.