Fonctions de deux variables

Dans ce chapitre, on se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$ qui, rappelons-le, sont définis par :

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \qquad \langle (x,y),(x',y') \rangle = xx' + yy' \qquad \text{et} \qquad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

I – Topologie de $\mathbb{R}^2$

1) Ouverts du plan

Définition 1 (disque du plan) Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. On appelle :

- ⋆ *boule ouverte* de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$D(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|y-x\| < r \right\}$$

- ⋆ *boule fermée* de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$\overline{D}(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|y-x\| \leqslant r \right\}$$

La notion de disque ouvert nous permet de définir un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$.

Définition 2 (ouvert de $\mathbb{R}^2$) Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite :

- ⋆ *ouverte* si :

$$\forall x \in A,\ \exists\, r > 0,\ D(x,r) \subset A$$

- ⋆ *fermée* si son complémentaire $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : un ouvert A de $\mathbb{R}^2$ est donc un ensemble dans lequel chaque point peut être « entouré » par une boule (*i.e.* un disque) incluse dans A. Aucun des points de A n'est « au bord » de A.

Exemple 1
- Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont tous les deux des ouverts (et donc des fermés en passant au complémentaire) de $\mathbb{R}^2$.
- Les singletons de $\mathbb{R}^2$ sont fermés.
- Il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont ni ouverts ni fermés. Par exemple, l'ensemble :

$$A = \left\{ (\lambda, 0) \,\middle|\, \lambda \in [0,1[\right\},$$

  que l'on peut identifier avec l'intervalle $[0,1[$ sur l'axe des abscisses n'est ni ouvert ni fermé.

Proposition 1 Toute boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et toute boule fermée est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration $\star$ Soit B une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. Il existe $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ tels que $B = D(x,r)$. Soit $y \in B$. Alors $\|y-x\| < r$ donc le nombre $s = r - \|y-x\|$ est strictement positif. Nous allons montrer que $D(y,s) \subset B$. Pour tout $z \in D(y,s)$, on a :

$$\begin{aligned}\|z-x\| = \|(z-y)+(y-z)\| &\leqslant \|z-y\| + \|y-x\| \\ &< \|x-y\| + r - \|y-x\| \\ &= r\end{aligned}$$

donc $z \in B$. L'inclusion est démontrée et donc B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
item[$\star$] Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. On veut montrer que $\overline{D}(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Il s'agit donc de montrer que l'ensemble $A = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(x,r)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$. On fixe $y \in A$. Alors $y \notin \overline{D}(x,r)$ donc $\|y-x\| > r$. Posons alors $s = \|y-x\| - r$ et montrons que $D(y,s) \subset A$. Pour tout $z \in D(y,s)$, on a :

$$\begin{aligned}\|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| &\geqslant \|x-y\| - \|y-z\| \\ &> \|x-y\| - s \\ &= r\end{aligned}$$

donc $z \in A$. Finalement, A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque : on peut démontrer que
- toute intersection d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$;
- toute réunion finie d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Applications continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition 3 Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit encore $a \in \Omega$. On dit que f est *continue en a* si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \|x-a\| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

La fonction f est dite continue sur Ω si elle est continue en tout point de Ω.

Remarque : la définition peut-être reformulée avec la notion de voisinage (on rappelle qu'un voisinage d'un nombre réel b est un intervalle de la forme $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$) :

$$\forall V \in \mathscr{V}(f(a)),\ \exists\, \delta > 0,\ f\big(\overline{D}(a,\delta) \cap \Omega\big) \subset V$$

Exemple 2
- La norme euclidienne :

$$\|\cdot\| : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \|(x,y)\| \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \qquad \big|\|X\| - \|a\|\big| \leqslant \|X-a\|$$

d'après l'inégalité triangulaire. Ainsi, si $\varepsilon > 0$ est fixé dans la définition de la continuité, le nombre $\delta = \varepsilon > 0$ convient.
- De la même manière, on peut montrer que les applications $(x,y) \longmapsto x$ et $(x,y) \longmapsto y$ sont continues.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

est continue au point $(0,0)$. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy|^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{4}(x^2+y^2) = \frac{\|(x,y)\|^2}{4}$$

car $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$. Ainsi, si $\varepsilon > 0$ est fixé dans la définition de la continuité, il suffit de choisir $\delta = 2\sqrt{\varepsilon} > 0$.

— La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0)=0$ et par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

n'est pas continue au point $(0,0)$. En effet, si elle l'était, alors pour le choix $\varepsilon = \dfrac{1}{4} > 0$, il existerait $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\| \leqslant \delta \implies |f(x,y)| \leqslant \frac{1}{4}$$

Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x,x) = \frac{1}{2}$$

donc, pour $x = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$, le couple $\left(\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}, \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}\right)$ à une norme égale à δ donc :

$$\frac{1}{2} = f\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{\delta}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \frac{1}{4},$$

ce qui est absurde.

Proposition 2 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in \Omega$ et $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en a. Alors :

(i) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f + \lambda g$ est continue en a :

(ii) $f \times g$ est continue en a ;

(iii) si $g(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que g ne s'annule pas sur $D(a, r \cap \Omega)$ et la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Démonstration analogue à celle pour les fonctions d'une variable ■

Exemple 3 — Les fonction polynomiale, c'est-à-dire de la forme :

$$f : (x,y) \longmapsto \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \lambda_{i,j} x^i y^j \qquad (\lambda_{i,j} \in \mathbb{R})$$

sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

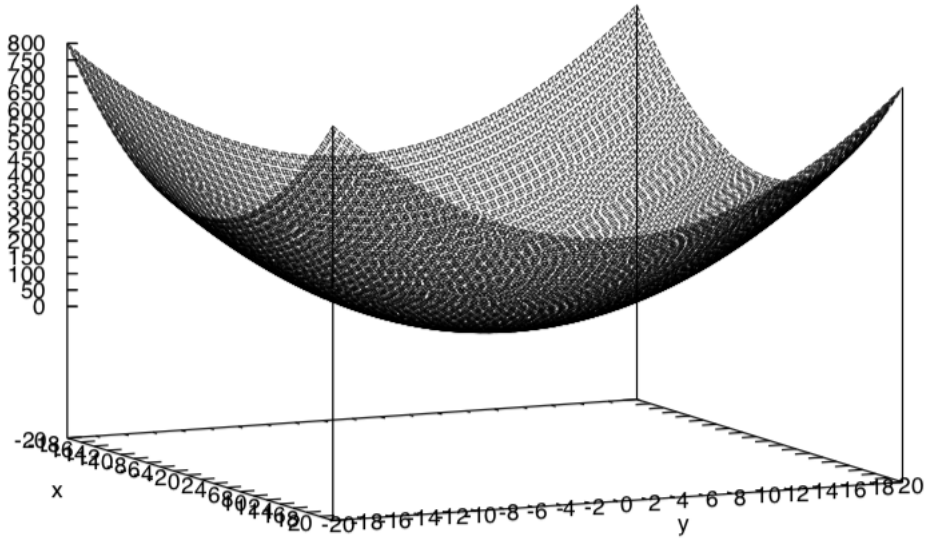
— La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0)=0$ et par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3) Représentation graphique

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on peut représenter une fonction de deux variables $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par une surface. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, cette surface $\mathscr{S}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, f(x,y))$ où $(x,y) \in \Omega$.



$f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$

II – Dérivées partielles

Dans tout ce paragraphe, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

1) Généralités

Définition 4 Soit $a \in \Omega$. On dit que f est *dérivable selon le vecteur* u s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \ell$$

Le nombre réel ℓ est alors appelé *dérivée directionnelle de* f *en* a *selon le vecteur* u et il est noté $\mathrm{D}_u f(a)$.

Remarques :

- ⋆ Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Ainsi, si $t \in \mathbb{R}^*$ est tel que $|t| \, \|u\| < r$, alors $a + tu \in \Omega$, et donc la quantité $f(a + tu)$ est bien définie si t est suffisamment proche de 0.
- ⋆ Lorsqu'elle existe, la dérivée directionnelle $D_h f(a)$ est le nombre dérivée en 0 de la fonction d'une variable $t \longmapsto f(a + th)$.

Exemple 4 Considérons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y \end{array} \right.$. Soit $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = 2x\alpha + t\alpha^2 + \beta$$

donc :

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 2x\alpha + \beta$$

On en déduit que f admet une dérivée directionnelle selon le vecteur $h = (\alpha, \beta)$ selon l'application :

$$D_h f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x\alpha + \beta \end{array} \right.$$

Définition 5 Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$.

- ⋆ On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable au point (x_0, y_0) si la fonction :
$$t \longmapsto \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$
admet une limite finie. Dans ce cas, cette limite est appelée première dérivée partielle de f au point (x_0, y_0) et elle est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- ⋆ On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable au point (x_0, y_0) si la fonction :
$$t \longmapsto \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}$$
admet une limite finie. Dans ce cas, cette limite est appelée deuxième dérivée partielle de f au point (x_0, y_0) et elle est notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Exemple 5 La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y \end{array} \right.$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Soit en effet $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x_0+t)^2 + y_0^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{t} = 2x_0 \in \mathbb{R}$$

et on obtient de la même façon :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t} = 1 \in \mathbb{R}$$

Les dérivées partielles de f sont donc :

$$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$$

Remarque : lorsque les dérivées partielles existent, on les obtient en fait en dérivant $x \longmapsto f(x, y_0)$ à y_0 fixé et $y \longmapsto f(x_0, y)$ à x_0 fixé.

Exemple 6 Les dérivées partielles de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 - 3\cos(y) + xy$ sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto 2x + y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto 3\sin(y) + x$$

Remarque : si une fonction admet des dérivées partielles en un point, alors la-dite fonction n'est pas nécessairement continue en ce point ! Considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

On sait que f n'est pas continue en $(0,0)$. De plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{f(t,0) - f(0,0)}{=} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

donc f admet des dérivées partielles au point $(0,0)$ (qui sont toutes les deux nulles).

Proposition 3 Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant des dérivées partielles par rapport aux deux variables en un point $a = (x_0, y_0)$ de Ω. Alors :

(i) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f + \lambda g$ admet des dérivées partielles en a qui valent :

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

(ii) $f \times g$ admet des dérivées partielles en a :

$$\frac{\partial(f \times g)}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

(iii) si $g(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que g ne s'annule pas sur $D(a,r) \cap \Omega$ et $\dfrac{f}{g}$ admet des dérivées partielles au point a et :

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x}(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{g(a)^2}$$

Démonstration même démonstration que pour une fonction d'une variable ■

2) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 6 Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si elle admet des dérivées partielles en tout point de Ω et si celles-ci sont continues sur Ω. On note alors $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarque : d'après ce qui précède, $(\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif et $(\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 7
— Les fonctions polynomiales (de deux variables) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
— La fonction $(x,y) \longmapsto \mathrm{e}^x + x\ln(y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Le résultat suivant est l'analogue du théorème de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de deux variables.

Proposition 4 (Taylor-Young à l'ordre 1) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ et $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. En posant $u = (h,k)$, on a au voisinage du point $(0,0)$:

$$f(a+u) \underset{u\to(0,0)}{=} f(a) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \mathrm{o}(\|u\|)$$

où $\mathrm{o}(\|u\|)$ représente une fonction φ définie sur un disque centré en $(0,0)$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^2,\ \|u\| \leqslant \delta \Longrightarrow |\varphi(u)| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration admis ■

Remarque : en posant $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\mu = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$, alors l'égalité précédente se réécrit :

$$f(x,y) = f(a) + \lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \mathrm{o}(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

Or l'ensemble d'équation :

$$z = f(a) + \lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0)$$

est un plan affine de $\mathbb{R}^3$. L'approximation donnée par la formule de Taylor signifie que l'on peut approcher, au voisinage du point a, la surface représentative de f par ce plan.

Corollaire 1 Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, alors f est continue sur Ω.

Démonstration Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in D(a, \delta), \qquad |\varphi(x - x_0, y - y_0)| \leqslant \varepsilon$$

Pour tout $(x, y) \in \Omega \cap D(a, \delta)$, on a alors :

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &= |\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \varphi(x - x_0, y - y_0)| \\ &\leqslant \max(|\lambda|, |\mu|)(|x - x_0| + |y - y_0|) + \varepsilon \\ &\leqslant 2 \max(|\lambda|, |\mu|) \|(x - x_0, y - y_0)\| + \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

3) Gradient et extrema

Définition 7 (gradient) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$. On appelle *gradient* de f en a le vecteur de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 8 La fonction $f : (x, y) \longmapsto x^3 + \mathrm{e}^x y - 7$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \nabla f(x, y) = (3x^2 + \mathrm{e}^x y, \mathrm{e}^x)$$

Remarque : la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 se réécrit, avec le gradient :

$$f(a + u) \underset{\|u\| \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), u \rangle + \mathrm{o}(\|u\|)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$. En notant θ l'écart angulaire formé par les vecteurs u et $\nabla f(a)$, on a donc :

$$f(a + u) - f(a) \underset{\|u\| \to 0}{=} \|\nabla f(a)\| \, \|u\| \cos(\theta) + \mathrm{o}(\|u\|)$$

Ainsi, en fixant $|u|$ non nul, l'écart $|f(a + u - f(a)|$ est maximal lorsque $\theta \equiv \pi \, [2\pi]$ (dans ce cas $|\cos(\theta)| = 1$), c'est-à-dire lorsque $\nabla f(u)$ et u sont colinéaires dans $\mathbb{R}^2$. Géométriquement, on en déduit que, sur la surface représentative de f, le gradient de f en a définit la direction dans laquelle f croît le plus vite au voisinage de a.

Définition 8 (points critiques et extrema) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$.

- ⋆ On dit que a est un *point critique* de f si $\nabla f(a) = (0, 0)$.
- ⋆ On dit que f est un *maximum* (respectivement *minimum*) *local* en a si :

$$\exists \, \varepsilon > 0, \ \forall x \in \Omega, \ x \in \overline{D}(a, \varepsilon) \implies f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{respectivement } f(x) \geqslant f(a))$$

- ⋆ On dit que f est un *maximum* (respectivement *minimum*) *global* en a si :

$$\forall x \in \Omega, \ f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{respectivement } f(x) \geqslant f(a))$$

L'étude des extrema d'une fonction de deux variables est plus délicate que pour une fonction d'une variable. En effet, une surface possède une infinité de directions dans lesquelles elle peut « monter » ou « descendre » au voisinage d'un point (contre deux directions dans le cas d'une seule variable). Les points critiques et les extrema restent tout de même lié comme dans le cadre des fonctions d'une seule variable.

Proposition 5 Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$. Si f admet un extremum local en a, alors $\nabla f(a) = (0,0)$.

Démonstration Posons $a = (x_0, y_0)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f admet un maximum local en a. Il existe donc $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [-\delta, \delta] \qquad f(x_0 + t, y_0)) \leqslant f(a)$$

et donc :

$$\forall t \in]0, \delta], \qquad \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(a)}{t} \leqslant 0$$

En faisant tendre t vers 0^+, on obtient l'inégalité $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \leqslant 0$. Le même raisonnement en choisissant $\delta \in [-\delta, 0[$ fournit l'inégalité $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \geqslant 0$. Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$. De la même manière, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. Autrement dit, $\nabla f(a) = (0,0)$. ■

Exemple 9
- La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (comme fonction polynomiale) et admet pour seul point critique $(0,0)$. En ce point, f présente un minimum global (et il s'agit du seul extremum de la fonction).
- La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 - y^2$ admet également comme seul point critique $(0,0)$ qui ne correspond pas à un extremum car :

$$\forall t > 0, \qquad f(t,0) = t^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad f(0,t) = -t^2 < 0$$

Cet exemple montre que la réciproque de la proposition précédente est fausse.

✎✎✎ **Exercice 1** Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - 2x - 4y \end{array} \right.$.

Une solution. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car est une fonction polynomiale et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \nabla f(x,y) = (2x - 2, 2y - 4)$$

Donc f admet pour unique point critique le point $(1,2)$. Or $f(1,2) = -5$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) \geqslant 5$$

On en déduit que f présente un minimum global au point $(1,2)$. La fonction f n'admet pas d'autres extrema locaux.

4) Composition

Proposition 6 (règle de la chaîne) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $x, y : I \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telles que :

$$\forall t \in I, \qquad (x(t), y(t)) \in \Omega$$

Alors :

(i) la fonction $g : t \longmapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I ;

(ii) pour tout $t \in I$, on a :

$$g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Démonstration Soit $t \in I$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, on a d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$f(x,y) = f(x(t),y(t)) + \langle \nabla f(x(t),y(t)), (x-x(t), y-y(t))\rangle + \mathrm{o}(\|(x-x(t), y-y(y))\|)$$

Les fonctions x et y sont continues au point t (car x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I) donc :

$$f(x(t+h),y(t+h)) \underset{h\to 0}{=} f(x(t),y(t)) + \langle \nabla f(x(t),y(t)), (x(t+h)-x(t), y(t+h)-y(t))\rangle + \mathrm{o}(\|(x(t+h)-x(t), y(t+h)-y(y))\|)$$

Or :

$$\begin{aligned}\|(x(t+h)-x(t), y(t+h)-y(y))\| &= \sqrt{(x(t+h)-x(t))^2 + (y(t+h)-y(t)^2} \\ &\underset{h\to 0}{=} \sqrt{(hx'(t)+\mathrm{o}(h))^2 + (hy'(t)+\mathrm{o}(h))^2} \\ &\underset{h\to 0}{=} \mathcal{O}(h)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} &\underset{h\to 0}{=} (x'(t)+\mathrm{o}(1))\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + (y'(t)+\mathrm{o}(1))\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) + \mathrm{o}(1) \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)),\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Remarque (interprétation géométrique) :

- ⋆ Notons $\gamma : t \longmapsto (x(t),y(t))$ (arc paramétré). Géométriquement, la fonction g correspond à la courbe de l'arc paramétré γ sur la surface représentative de f. Avec cette notation, la règle de la chaîne se réécrit (on dit qu'on dérive la fonction f le long de l'arc γ) :

$$\forall t \in I, \qquad (f\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

- ⋆ On appelle ligne de niveau d'indice $k \in \mathbb{R}$ l'ensemble suivant :

$$\mathscr{L}_k = \big\{(x,y)\in\Omega \,\big|\, f(x,y) = k\big\} = f^{-1}(\{k\})$$

  Géométriquement, $\mathscr{L}_k$ représentent les points de la surface se situant à l'altitude k. D'après la remarque précédente, le gradient de f en un point $a \in \Omega$ est orthogonal aux lignes de niveau de la fonction. En effet, fixons une ligne de niveau $\mathscr{L}_k$. Soit $(x,y) \in \mathscr{L}_k$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathscr{L}_k$ une courbe tracée sur la ligne de niveau telle que $\gamma(0) = (x,y)$. Alors (puisque g est constante égale à k sur I) :

$$0 = g'(0) = \langle \nabla f(x), \gamma'(0)\rangle$$

Proposition 7 (règle de la chaîne généralisée) Soient Λ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ et $u, v : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur Λ telles que :

$$\forall x,y \in \Lambda, \qquad (u(x,y), v(x,y)) \in \Omega$$

Alors :

(i) la fonction $g : (x,y) \longmapsto f(u(x,y),v(x,y))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Λ ;

(ii) pour tout $(x,y) \in \Lambda$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y),v(x,y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y),v(x,y))$$

et :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y),v(x,y)) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y),v(x,y))$$

Démonstration admise ■

Exemple 10 Considérons la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2y + \mathrm{e}^{x-y}$, $u : (x, y) \longmapsto x - y$ et $v : (x, y) \longmapsto 2x + y$. Les fonctions f, u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc la fonction $g : (x, y) \longmapsto f(u(x, y), v(x, y))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \dots \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \dots$$