Familles sommables

Quelques rappels :

- ⋆ Dans $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$, on peut écrire que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant +\infty,\ +\infty + x = +\infty) \qquad \text{et} \qquad +\infty \leqslant +\infty$$

- ⋆ **Propriété de la borne supérieure :** toute partie non vide de $\mathbb{R}_+$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ (elle appartient à $\mathbb{R}_+$ si la partie est majorée ; sinon, elle vaut $+\infty$).
- ⋆ **Caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:**
  Soient A une partie de $\mathbb{R}_+$ et $M \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Alors :

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M \\ \exists\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M \end{cases}$$

- ⋆ Par convention, $\displaystyle\sum_{i\in\varnothing} u_i = 0$.

Dans tout ce chapitre, I désigne un ensemble non vide quelconque. On note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties de I ayant un nombre fini d'éléments.

Exemple 1 Si $I = \mathbb{Z}$, on a $\varnothing, [\![-10, 10]\!] \in \mathscr{P}_f(\mathbb{Z})$ mais $2\mathbb{N} \notin \mathscr{P}_f(\mathbb{Z})$.

I – Familles sommables de réels positifs

1) Definition

Soit $u = (u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ (*i.e.* : $\forall i \in I,\ u_i \in \mathbb{R}_+$).

Proposition 1 L'ensemble :

$$S(u) = \left\{ \sum_{i\in F} u_i \,\middle|\, F \in \mathscr{P}_f(I) \right\}$$

admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$.

Démonstration L'ensemble $S(u)$ est une partie de $\mathbb{R}$ (même de $\mathbb{R}_+$) qui est non vide d'où le résultat d'après la propriété de la borne supérieure. ■

Définition 1 (somme d'une famille sommable) La quantité $\sup(S(u))$ est appelée somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et est notée $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$.

Remarques :

- ⋆ La somme existe toujours et $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \in [0,+\infty]$.
- ⋆ Par définition de la borne supérieure, on a :

$$\forall F \in \mathscr{P}_f(I), \qquad \sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

Définition 2 (famille sommable positive) La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite *sommable* si :

$$\sum_{i\in I} u_i \in \mathbb{R}_+ \qquad i.e. \qquad \sum_{i\in I} u_i < +\infty$$

Exemple 2 La famille (positive) $(x)_{x\in\mathbb{Q}_+}$ n'est pas sommable. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $F_N = [\![0,N]\!] \in \mathscr{P}_f(\mathbb{Q}_+)$ donc :

$$\sum_{x\in\mathbb{Q}_+} x \geqslant \sum_{x\in[\![0,N]\!]} x = N+1$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Q}_+} x$ majore l'ensemble $\mathbb{N}^*$, ce qui signifie que $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Q}_+} x = +\infty$.

Exemple 3 Soit $x \in]0,1[$. Montrons que la famille $u = (x^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Soit $F \in \mathscr{P}_f(\mathbb{Z})$. Alors :

$$\sum_{n\in F} x^{|n|} = \underbrace{\sum_{n\in F\cap\mathbb{N}} x^n}_{\text{notée } S_1} + \underbrace{\sum_{n\in F\setminus\mathbb{N}} \frac{1}{x^n}}_{\text{notée } S_2}$$

Posons $M = \max\left\{|n| \,\middle|\, n \in F\right\}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $x^n \geqslant 0$ donc :

$$S_1 \leqslant \sum_{n=0}^{M} x^n = \frac{1-x^{M+1}}{1-x} \leqslant \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad S_2 \leqslant \sum_{n=-M}^{-1} x^{-n} = \sum_{n=1}^{M} x^n \leqslant \frac{x}{1-x}$$

Ainsi :

$$\sum_{n\in F} x^{|n|} = S_1 + S_2 \leqslant \frac{1+x}{1-x}$$

On en déduit que l'ensemble $S(u)$ est majoré (et est non vide) donc admet une borne supérieure (finie) d'après la propriété de la borne supérieure. Autrement dit, la famille u est sommable.
De plus, en considérant la famille $F_N = [\![-N,N]\!] \in \mathscr{P}_f(\mathbb{Z})$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n\in F_N} x^{|x|} = \sum_{n=-N}^{N} x^{|n|} = \sum_{n=0}^{N} x^n + \sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{1+x-2x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1+x}{1-x}$$

Comme $x^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ (puisque $x \in]0,1[$), on a :

$$\sum_{n\in F_N} x^{|x|} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1+x}{1-x}$$

Comme on sait aussi que $\dfrac{1+x}{1-x}$ majore $S(u)$, la caractérisation séquentielle de la borne supérieure nous permet de conclure que :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{|n|} = \frac{1+x}{1-x}$$

Proposition 2 (sous-famille d'une famille sommable positive) Soient $(u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ une famille sommable et $J \subset I$. Alors :

- ⋆ la famille $(u_i)_{i\in J}$ est sommable ;
- ⋆ on a l'inégalité $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

Démonstration Posons $u' = (u_i)_{i\in J}$ et :

$$S(u) = \left\{ \sum_{i\in F} u_i \,\middle|\, F \in \mathscr{P}_f(I) \right\} \qquad \text{et} \qquad S(u') = \left\{ \sum_{i\in F} u_i \,\middle|\, F \in \mathscr{P}_f(J) \right\}$$

Comme $J \subset I$, pour toute partie finie F de J, F est aussi une partie finie de I donc $\displaystyle\sum_{i\in F} u'_i \in S(u)$. On en déduit, par définition de la borne supérieure, que :

$$\sum_{i\in F} u_i \leqslant \sup(S(u)) \qquad i.e. \qquad \sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

L'ensemble $S(u')$ est majoré par $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ (qui est un nombre réel par sommabilité de u). Comme $\sup(S(u'))$ est le plus petit majorant de $S(u')$, on a :

$$\sup(S(u')) \leqslant \sum_{i\in I} u_i \qquad i.e. \qquad \sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i,$$

d'où le résultat. ■

Proposition 3 (théorème de comparaison pour les familles positives) Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs telles que :

$$\forall i \in I, \qquad u_i \leqslant v_i \tag{$*$}$$

Alors (l'inégalité a lieu dans $[0, +\infty]$) :

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$$

Remarque : il n'y a pas besoin d'hypothèse de sommabilité des familles.

Démonstration Soit $F \in \mathscr{P}_f(I)$. D'après $(*)$, on a :

$$\sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in F} v_i \leqslant \sup(S(v))$$

Ceci entraîne que $\sup(S(v))$ majore $S(u)$. Par définition de la borne supérieure, il vient :

$$\sup(S(u)) \leqslant \sup(S(v)) \qquad i.e. \qquad \sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

2) Sommabilité et sommes finies, sommabilité vs convergence de série

Proposition 4 (sommabilité et somme d'une famille finie positive) Soit $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ un ensemble fini. Toute famille $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ est sommable et :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=1}^{n} u_{i_k}$$

Démonstration Soit $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$. Par positivité de la suite, on a pour tout $F \in \mathscr{P}(I)$ (une partie de I est finie car I est finie) :

$$\sum_{i \in F} u_i \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_{i_k}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{i_k} \in \mathbb{R}_+$ majore $S(u)$ donc u est sommable et $\sup(S(u)) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{i_k}$. Ce majorant étant atteint pour $F = I$, on a $\sup(S(u)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{i_k}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=1}^{n} u_{i_k}$. ∎

Remarque : ouf.

Proposition 5 (sommabilité et convergence de séries à termes positifs) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Alors :

- ⋆ la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge ;
- ⋆ dans tous les cas, on a l'égalité :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

  où on a posé $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ si la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

Démonstration ⋆ Soient $F \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ et $N = \max(F) \in \mathbb{N}$. Si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente, alors par positivité de la suite u, on a :

$$\sum_{n \in F} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Comme $S(u)$ est majoré par $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}_+$, la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et, par définition de la borne supérieure, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Pour obtenir l'égalité, il suffit de remarquer que pour $F_N = [\![0, N]\!]$, on a :

$$\sum_{n \in F_N} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on a $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- ⋆ Réciproquement, si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge alors, comme il s'agit d'une série à termes positifs, on a (on pose encore $F_N = [\![0, N]\!]$) :

$$\sum_{n\in F_N} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

Exemple 4 On a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ puisque la série harmonique est divergente.

3) Opérations sur les sommes

Proposition 6 (invariance de la somme par permutation) Soient $u = (u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ et $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection. Alors :

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i \qquad \text{(égalité dans } [0, +\infty])$$

En particulier, la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_i)_{i\in I}$ l'est.

Démonstration On pose $u_\sigma = (u_{\sigma(i)})_{i\in I}$.

- ⋆ Soit $F \in \mathscr{P}_f(I)$. Alors $G = \sigma(F) \in \mathscr{P}_f(I)$ donc (en utilisant le changement d'indice $j = \sigma(i)$, qui est licite car σ est injective) :

$$\sum_{i\in F} u_{\sigma(i)} = \sum_{j\in G} u_j \leqslant \sup(S(u))$$

par définition de la borne supérieure. Toujours par définition de la borne supérieure, on a :

$$\sup(S(u_\sigma)) \leqslant \sup(S(u)) \qquad \textit{i.e.} \qquad \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

- ⋆ Réciproquement, soient $F \in \mathscr{P}_f(I)$ et $H = \sigma^{-1}(F) \in \mathscr{P}_f(I)$. En effectuant le changement d'indice $j = \sigma^{-1}(i)$ (licite par bijectivité de σ), on a :

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{i\in F} u_{\sigma(\sigma^{-1}(i))} = \sum_{j\in H} u_{\sigma(j)} \leqslant \sup(S(u_\sigma))$$

et donc :

$$\sup(S(u)) \leqslant \sup(S(u_\sigma)) \qquad \textit{i.e.} \qquad \sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)},$$

d'où l'égalité. ■

Remarque : en général, c'est faux pour une famille qui n'est pas positive. Par exemple, on a vu que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente de somme (notons la S) égale à $\ln(2)$, ce qui s'écrit en extension :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln(2)$$

Ici, on ne peut pas modifier l'ordre des termes sans incidence. Par exemple, faisons des paquets de trois :

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\dots \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\dots \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots\right) \\
&= \frac{S}{2} \\
&= \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

Proposition 7 (combinaison linéaire positive) Soient $u=(u_i)_{i\in I}, v=(v_i)_{i\in I}\in(\mathbb{R}_+)^I$ et $\lambda\in\mathbb{R}_+$. Alors :

$$\sum_{i\in I}(u_i+\lambda v_i)=\sum_{i\in I}u_i+\lambda\sum_{i\in I}v_i \qquad (\text{égalité dans } [0,+\infty])$$

Démonstration Soit $F\in\mathscr{P}_f(I)$. Par linéarité des sommes finies, on a :

$$\sum_{i\in F}(u_i+\lambda v_i)=\sum_{i\in F}u_i+\lambda\sum_{i\in F}v_i\leqslant\sup(S(u))+\lambda\sup(S(v))$$

par définition de la borne supérieure et car $\lambda\geqslant 0$. Ainsi (toujours par définition de la borne supérieure) :

$$\sup(S(u+\lambda v))\leqslant\sup(S(u))+\lambda\sup(S(v)) \qquad \textit{i.e.} \qquad \sum_{i\in I}(u_i+\lambda v_i)\leqslant\sum_{i\in I}u_i+\lambda\sum_{i\in I}v_i$$

Ensuite, par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans $[0,+\infty]$, il existe des suites de sous-ensemble finis $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I tels que :

$$\sum_{i\in F_n}u_i\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{i\in I}u_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in G_n}v_i\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{i\in I}v_i$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $F_n\subset F_n\cup G_n$ et la famille u est positive donc :

$$\sum_{i\in F_n}u_i\leqslant\sum_{i\in F_n\cup G_n}u_i\leqslant\sum_{i\in I}u_i$$

Le théorème des gendarmes implique que :

$$\sum_{i\in F_n\cup G_n}u_i\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{i\in I}u_i$$

De même :

$$\sum_{i\in F_n\cup G_n}v_i\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{i\in I}v_i$$

On en déduit que :

$$\sum_{i\in F_n\cup G_n}(u_i+\lambda v_i)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{i\in I}(u_i+\lambda v_i)$$

La caractérisation séquentielle de la borne supérieure permet de conclure quant à l'égalité souhaitée. ■

4) Sommation par paquets

Théorème 1 (de sommation par paquets positif) Soient $u = (u_i)_{i\in I}$ et $(I_j)_{j\in J}$ une famille de sous-ensembles deux à deux disjoints de I tels que :

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$$

Alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in i_j} u_i \qquad \text{(égalité dans } [0,+\infty])$$

Démonstration admis ■

Remarque : lorsqu'on utilise ce résultat, on peut faire les calculs directement. La valeur finale obtenue (un réel positif ou $+\infty$) permet de conclure quant à la sommabilité de la famille u.

Exemple 5 ⋆ Soit $x \in]0,1[$. La famille $u = (x^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

Justification. On a $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}^*)\bigsqcup\mathbb{N}$ donc, comme u est positive et d'après le théorème de sommation par paquets positifs, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{|n|} = \sum_{n\in(-\mathbb{N}^*)} x^{|n|} + \sum_{n\in\mathbb{N}} x^{|n|} &= \sum_{n\in(-\mathbb{N}^*)} x^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x^n + \frac{1}{1-x} \qquad \text{(théorème de permutation des termes)} \\
&= \frac{x+1}{1-x} \in \mathbb{R}_+,
\end{aligned}$$

ce qu'on avait déjà obtenu.

⋆ Étudions la sommabilité de la famille $u = \left(\dfrac{1}{(m+n)^3}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ en considérant, pour tout $d \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, l'ensemble $I_d = \big\{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \,\big|\, m+n=d\big\}$.
On a bien :

$$\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{d\geqslant 2} I_d$$

et la famille u est positive donc, d'après le théorème de sommation par paquets positifs, on a :

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^3} = \sum_{d=2}^{+\infty}\sum_{(m,n)\in I_d} \frac{1}{(m+n)^3} = \sum_{d=2}^{+\infty} \frac{|I_d|}{d^3} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{d-1}{d^3} = \zeta(2)-\zeta(3) \in \mathbb{R}_+$$

donc la famille u est sommable et on vient d'obtenir sa somme.

Le résultat suivant est très pratique lorsque I s'écrit comme un produit cartésien.

Corollaire 1 (théorème de Fubini positif) Soient A et B deux ensembles non vides et $(u_{m,n})_{(m,n)\in A\times B} \in (\mathbb{R}_+)^{A\times B}$. Alors :

$$\sum_{(m,n)\in A\times B} u_{m,n} = \sum_{m\in A}\sum_{n\in B} u_{m,n} = \sum_{n\in B}\sum_{m\in A} u_{m,n}$$

Démonstration On remarque que :

$$I = \bigsqcup_{m\in A} (\{m\}\times B) = \bigsqcup_{n\in B} (A\times\{n\})$$

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de sommation par paquets. ■

Exemple 6 ⋆ Soit $x \in [0,1[$. Étudions la sommabilité de la famille $u = \left(x^{p+q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$. Comme il s'agit d'une famille de nombres positifs, on a d'après le théorème de Fubini positif :

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} x^{p+q} = \sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} x^p x^q\right) = \sum_{p\in\mathbb{N}} x^p \left(\sum_{q\in\mathbb{N}} x^q\right) &= \sum_{p\in\mathbb{N}} x^p \left(\sum_{q=0}^{+\infty} x^q\right)\\ &= \sum_{p\in\mathbb{N}} x^p \times \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\geqslant 0}\\ &= \frac{1}{1-x}\sum_{p\in\mathbb{N}} x^p \qquad \text{(linéarité positive de la somme)}\\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \in \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

En particulier, la famille u est sommable.

⋆ Calculons la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$. On a :

$$\begin{aligned}S = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\in[\![1,n]\!]} \frac{1}{2^n} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \text{(théorème de Fubini positif)}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \times \frac{1}{2^k}\\ &= 2\end{aligned}$$

⋆ Pour tout $p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on pose $\zeta(p) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Calculer la somme $T = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)$. On a :

$$\begin{aligned}T = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} &= \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \qquad \text{(théorème de Fubini positif)}\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{k}}\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

donc (somme télescopique) on a $T = 1$.

II – Familles sommables à valeurs dans $\mathbb{C}$

On généralise ici la notion de famille sommable à une famille à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Notions de sommabilité

Définition 3 (famille sommable, cas général) Une famille $(u_i)_{\in I} \in \mathbb{C}^I$ est dite *sommable* si la famille $\left(|u_i|\right)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ de réels positifs est sommable, c'est-à-dire si :

$$\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$$

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables complexes indexées par I *i.e.* :

$$\ell^1(I) = \left\{ (u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I \,\middle|\, \sum_{i\in I} |u_i| < +\infty \right\}$$

Exemple 7 Si $x \in \mathbb{C}$ est tel que $|x| < 1$, alors la famille $(x^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. En effet, on a vu que si $y \in [0,1[$, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{|n|} < +\infty$.

Remarques.

- ⋆ Pour une famille de réels positifs $(u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$, on retrouve la définition première de la sommabilité (puisque : $\forall i \in I,\ |u_i| = u_i$ dans ce cas).
- ⋆ Si $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable et si J est une partie de I, alors la famille $(u_i)_{i\in J}$ est sommable. En effet, on a vu que si $\displaystyle\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$, alors $\displaystyle\sum_{i\in J} |u_i| < +\infty$.
- ⋆ L'ensemble $\ell^1(\mathbb{N})$ est celui des séries absolument convergentes (d'après le lien établi entre séries numériques et familles sommables).

Exemple 8 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la famille $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est sommable tandis que $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ ne l'est pas.

Proposition 8 (théorème de comparaison pour les familles sommables) Soient $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ et $(v_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$. On suppose que :

- ⋆ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable ;
- ⋆ $\forall i \in I,\ |u_i| \leqslant v_i$.

Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Démonstration D'après le théorème de comparaison pour les familles positives, on a :

$$\sum_{i\in I} |u_i| \leqslant \sum_{i\in I} v_i$$

Comme $\displaystyle\sum_{i\in I} v_i < +\infty$, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$, ce qui signifie que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. ■

Exemple 9 La famille $\left(\dfrac{\sin(n)}{2^{|n|}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable car la famille de nombres réels positifs $\left(\dfrac{1}{2^{|n|}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ l'est et car :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \left|\frac{\sin(n)}{2^{|n|}}\right| \leqslant \frac{1}{2^{|n|}}$$

2) Somme d'une famille sommable quelconque

Notation : si $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(0,x) \in \mathbb{R}_+$ et $x^- = \max(0,-x) \in \mathbb{R}_+$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x = x^+ - x^- \qquad , |x| = x^+ + x^- \qquad \text{et} \qquad x^{\pm} \leqslant |x|$$

- ⋆ Si $(u_i)_{\in I} \in \mathbb{R}^I$ est une famille sommable, alors d'après le théorème de comparaison positif, on a :

$$\sum_{i\in I} (u_i)^{\pm} \leqslant \sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$$

  donc les familles positives $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables.
- ⋆ Si maintenant $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable. Pour tout $i \in I$, on a $|\mathrm{Re}(u_i)| \leqslant |u_i|$ donc, d'après le théorème de comparaison pour les familles sommables, la famille réelle $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ est sommable. Il en va de même pour la famille $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$.

Ceci nous permet de définir la somme d'une famille sommable réelle ou complexe.

Définition 4 (somme d'une famille sommable quelconque) ⋆ Si $(u_i)_{\in I} \in \mathbb{R}^I$ est sommable, on définit la somme de la famille par :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$

⋆ Si $(u_i)_{\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable, on pose :

$$\sum_{j\in I} \mathrm{Re}(u_j) + i\sum_{j\in I} \mathrm{Im}(u_j)$$

Proposition 9 Soient $(u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe un sous-ensemble fini F_ε de I tel que :

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F_\varepsilon} u_i\right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$.

- ⋆ On se place dans le cas où $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$. Comme $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, les familles de réels positifs $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables. Notons $S_+ \in \mathbb{R}$ et $S_- \in \mathbb{R}$ leurs sommes respectives. Par définition de la borne supérieure, il existe deux parties finies F_+ et F_- de I telles que :

$$(\forall i \in F_+,\ u_i > 0) \qquad \text{et} \qquad (\forall i \in F_-,\ u_i < 0)$$

  et :

$$\left|\sum_{i\in F^+} u_i^+ - S_+\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \left|\sum_{i\in F^-} u_i^- - S_-\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

  En remplaçant F_+ et F_- par $F = F_+ \cup F_-$, on a aussi :

$$\left|\sum_{i\in F} u_i - S_+\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \left|\sum_{i\in F} u_i - S_-\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

  et donc, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| &= \left|(S_+ - S_-) - \left(\sum_{i\in F} u_i^+ - \sum_{i\in F} u_i^-\right)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{i\in F_+} u_i - S_+\right| + \left|\sum_{i\in F_-} u_i - S_-\right| \\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

- ⋆ Si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs complexes, on applique le point précédent aux familles sommables réelles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ avec le choix $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0$. ■

Proposition 10 Soient $(u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

- ⋆ la famille $(u_i + \lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable ;
- ⋆ $\displaystyle\sum_{i\in I}(u_i + \lambda v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \lambda \sum_{i\in I} v_i$.

Démonstration ⋆ Pour tout $i \in I$, on a :

$$|u_i + \lambda v_i| \leqslant |u_i| + |\lambda|\,|v_i|$$

Par hypothèse et par linéarité positive, la famille de réels positifs $\big(|u_i| + |\lambda|\,|v_i|\big)_{i\in I}$ est sommable. D'après le théorème de comparaison pour les familles sommables, la famille $(u_i + \lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable.

- ⋆ admis ■

Corollaire 2 L'ensemble $\ell^1(I)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Démonstration C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente : $\ell^1(I)$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$. ■

3) Sommation par paquets

Théorème 2 (de sommation par paquets général) Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille de sous-ensembles deux à deux disjoints de I telle que :

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$$

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille *sommable*. Alors :

(i) pour tout $j \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable ;

(ii) la famille $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable.

De plus, on a l'égalité :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

Démonstration admis ■

Corollaire 3 (théorème de Fubini général) Soient A et B deux ensembles non vides et $(u_{m,n})_{(m,n)\in A\times B} \in (\mathbb{C})^{A\times B}$ une famille *sommable*. Alors :

$$\sum_{(m,n)\in A\times B} u_{m,n} = \sum_{m\in A}\sum_{n\in B} u_{m,n} = \sum_{n\in B}\sum_{m\in A} u_{m,n}$$

En particulier, si $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ et $(b_{i'})_{i'\in I'} \in \mathbb{C}^{I'}$ sont des familles *sommables*, alors la famille $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et :

$$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{i'\in I'} b_{i'}\right)$$

Remarque : pour appliquer ces deux résultats avec une famille $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$, on commence par appliquer le résultat correspondant pour la famille positive $(|u_i|)_{i\in I}$. Ceci permettra d'affirmer que la famille initiale est sommable. On peut ensuite faire les calculs sans modules.

✎✎✎ **Exercice 1** Montrer que la famille $u = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}}{2^n}\right)_{\substack{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n\geqslant k+1}}$ est sommable et calculer sa somme notée S.

Solution.

⋆ On étudie la sommabilité de la famille en appliquant le théorème de Fubini positif. Selon ce théorème, on a (les calculs ayant lieu dans $[0,+\infty]$) :

$$\sum_{\substack{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n\geqslant k+1}} \left|\frac{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}}{2^n}\right| = \sum_{\substack{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n\geqslant k+1}} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \underbrace{\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-(k+1)}}}_{=2} = 1 \in \mathbb{R}_+$$

La famille u est donc sommable.

⋆ D'après le théorème de Fubini général, on a maintenant :

$$S = \sum_{\substack{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n\geqslant k+1}} \frac{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{=-1} = -\frac{1}{2}$$

III – Produit de Cauchy

Définition 5 (produit de Cauchy) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On appelle produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ où le terme général est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

En général, la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ne garantit pas celle du produit de Cauchy.

Exemple 10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. La série alternée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente. Le produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ n'est cependant par convergent car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

donc :

$$|w_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$$

Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, d'où la divergence (grossière) de la série produit de Cauchy.

Proposition 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ soient absolument convergentes. Alors le produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ de ces deux séries définit une série absolument convergente et on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Remarque : en extension, cette égalité se réécrit

$$(u_0+u_1+u_2+\dots)(v_0+v_1+v_2+\dots) = \underbrace{u_0v_0}_{i+j=0} + \underbrace{(u_0v_1+u_1v_0)}_{i+j=1} + \underbrace{(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)}_{i+j=2} + \dots$$

Démonstration D'après le lien entre séries et familles sommables, les familles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables. D'après le théorème de Fubini, la famille $(u_pv_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on a l'égalité :

$$\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} v_q\right) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_pv_q$$

On applique maintenant le théorème de sommation par paquets. On écrit :

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \qquad \text{où} \qquad I_n = \left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \,\middle|\, p+q=n\right\}$$

D'après ce théorème on peut écrire (par sommabilité de $(u_pv_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$) que :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_pv_q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}} u_pv_q = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{p=0}^{n} u_pv_{n-p} = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n,$$

la convergence de la dernière série étant assurée par le même théorème. ■

En utilisant le produit de Cauchy, on retrouve une propriété bien connue de l'exponentielle complexe.

Corollaire 4 (exp) L'application :

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{C},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times) \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{z} \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes.

Démonstration Soient $z, w \in \mathbb{C}$. On sait que :

$$\mathrm{e}^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n\,!} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{w} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n\,!},$$

les séries définissant e^{z} et e^{w} étant absolument convergentes. Le produit de Cauchy de celles-ci est donc une série (absolument) convergente et on a l'égalité :

$$\mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{w} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k\,!} \times \frac{w^{n-k}}{(n-k)\,!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n\,!} = \mathrm{e}^{z+w}$$

en utilisant la formule du binôme de Newton. ■