Variables aléatoires discrètes

Étant donnée une expérience aléatoire, on peut naturellement construire des applications qui à chaque issue de l'expérience associe une grandeurs numériques.

Exemple 1 On lance deux dés et on note X la somme des faces obtenues. L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Par exemple :

$$X\big((1,1)\big) = 2 \qquad \text{et} \qquad X\big((2,5)\big) = 7$$

On systématise dans ce chapitre l'étude de telles applications.

Dans tout ce chapitre, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

I – Notion de variable aléatoire

1) Définition et notations

Définition 1 (variable aléatoire, univers image) ⋆ On appelle *variable aléatoire sur* Ω toute application $X : \Omega \longrightarrow E$, où E est un ensemble non vide.

⋆ On appelle *univers image de* X l'ensemble $X(\Omega)$ (c'est-à-dire l'image de Ω par X dans E).

Remarques :

⋆ Si $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire *réelle*.

⋆ Comme Ω est fini, l'univers image $X(\Omega)$ de X est fini.

Exemple 2 Pour le lancer de deux dés (exemple précédent), l'univers image de X est $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

Quelques notations. Soient $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire, $x \in E$ et $A \subset E$. On notera :

— $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'événement :

$$X^{-1}(A) = \big\{\omega \in \Omega \,\big|\, X(\omega) \in A\big\}$$

— $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ l'événement :

$$X^{-1}(\{x\}) = \big\{\omega \in \Omega \,\big|\, X(\omega) = x\big\}$$

— si $E \subset \mathbb{R}$, $\{X \leqslant x\}$ ou $(X \leqslant x)$ l'événement :

$$X^{-1}(]{-\infty}, x]) = \big\{\omega \in \Omega \,\big|\, X(\omega) \leqslant x\big\}$$

— idem pour $(X > x)$, $(X \geqslant x)$ et $(X < x)$

Dans la suite, nous serons par exemple amené à calculer la probabilité $P(\{X \in A\})$, que nous noterons plus simplement $P(X \in A)$.

Exemple 3 Pour le lancers de deux dés, on a par exemple :

$$(S = 4) = \big\{(1,3), (2,2), (3,1)\big\} \qquad \text{et} \qquad (S \leqslant 12) = \Omega$$

2) Loi d'une variable aléatoire

Définition 2 (loi de X) Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On appelle *loi de* X l'application :

$$P_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(X \in A) \end{array} \right.$$

Remarques :

- ⋆ On a l'égalité $P_X = P \circ X^{-1}$.
- ⋆ La loi de X est complètement déterminée par distribution de probabilités $\big(P(X = x)\big)_{x \in E}$ (appelée distribution de probabilités de X). En effet, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, alors :

$$P_X(A) = P(X \in A) = P\left(\bigcup_{x \in A} (X = x)\right) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

Exemple 4 Pour le lancer des deux dés, on obtient :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

✎✎✎ **Exercice 1**

1. Une urne contient trois boules portant le numéro 1, cinq boules portant le numéro 3 et 2 boules portant le numéro 5. On tire une boule au hasard et on appelle N le numéro qui figure dessus.
2. Dans une urne, on place 3 jetons rouges et 4 jetons noirs. On tire successivement et avec remise 2 boules. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de jetons rouges tirés. Déterminer le tableau de la loi de probabilité de X.

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{16}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{9}{49}$

Proposition 1 Soit X une variable aléatoire. Alors P_X est une probabilité sur E.

Démonstration On vérifie les deux axiomes qui définissent une probabilité.

- ⋆ Comme X est à valeurs dans E, on a :

$$P_X(E) = P(X \in E) = P(\Omega) = 1$$

car P est une probabilité.

- ⋆ Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \cap B = \varnothing$. Alors $X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$ car :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega, \qquad \omega \in X^{-1}(A \cup B) \iff X(\omega) \in A \cup B &\iff X(\omega) \in A \text{ ou } X(\omega) \in B \\ &\iff \omega \in X^{-1}(A) \text{ ou } \omega \in X^{-1}(B) \\ &\iff \omega \in X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B) \end{aligned}$$

De plus, $X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = \varnothing$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \in X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$ et alors $X(\omega) \in A \cap B$, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\begin{aligned} P_X(A \cup B) = P(X \in A \cup B) = P(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)) &= P(X^{-1}(A)) + P(X^{-1}(B)) \\ &= P_X(A) + P_X(B) \end{aligned}$$

■

Proposition 2 Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. Alors $\big\{(X = x) \,\big|\, x \in X(\Omega)\big\}$ est un système complet d'événements. En particulier, on a :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$$

Démonstration Par définition de $X(\Omega)$, on a $\displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x) = \Omega$. De plus, si $(x, y) \in X(\Omega)^2$ est tel que $x \neq y$, alors il est clair que $(X = x) \cap (X = y) = \varnothing$, d'où le résultat. ■

Définition 3 (variables aléatoires de même loi) Deux variables aléatoires $X, Y : \Omega \longrightarrow E$ sont dites de même loi, noté $X \sim Y$ si $P_X = P_Y$.

Remarques :

- ⋆ Si $X \sim Y$, alors $X(\Omega) = Y(\omega)$.
- ⋆ Le fait que $X \sim Y$ n'implique pas que $X = Y$. Par exemple, deux joueurs lancent chacun un dé équilibré et on note X et Y les numéros obtenus.

3) Image d'une variable aléatoire par une application

Considérons une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow E$ et une application $f : E \longrightarrow F$ où F est un ensemble non vide quelconque. L'application :

$$f \circ X : \Omega \longrightarrow F$$

est alors une variable aléatoire que l'on notera plus simplement $f(X)$. Si $A \in \mathscr{P}(F)$, alors :

$$P_{f(X)}(A) = P(f(X) \in A) = P(X \in f^{-1}(A)) = P_X(f^{-1}(A))$$

✎✎✎ **Exercice 2** Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.15	0.2	0.3	0.1	0.05	0.2

Déterminer les lois de $Y = X + 5$ et de $Z = X^2$.

Proposition 3 Soient $X, Y : \Omega \longrightarrow E$ deux variables aléatoires telles que $X \sim Y$ et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors $f(X) \sim f(Y)$.

Démonstration On a :

$$P_{f(X)} = P_X \circ f^{-1} = P_Y \circ f^{-1} = P_{f(Y)},$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

II – Les lois usuelles

1) Loi uniforme

Définition 4 (loi uniforme) Soit E un ensemble fini non vide. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow E$ suit la *loi uniforme*, ce que l'on note $X \sim \mathscr{U}(E)$, si P_X est la probabilité uniforme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E, \qquad P(X = x) = \frac{1}{\mathrm{card}(E)}$$

Remarques :

- ⋆ Si $E = [\![1, n]\!]$, la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ est aussi notée $\mathscr{U}(n)$.
- ⋆ Si $X \sim \mathscr{U}(E)$, alors :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \qquad P_X(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(E)}$$

Exemple 5 On lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu. Alors $X \sim \mathscr{U}(6)$.

✎✎✎ **Exercice 3** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}(n)$. Montrer que X^2 suit également une loi uniforme.

✎✎✎ **Exercice 4** On considère un jeu de 32 cartes dans lequel on pioche une carte au hasard jusqu'à obtenir le valet de pique (on ne remet pas les cartes piochées dans le jeu). On note X la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de tirages nécessaires à l'obtention du valet de pique. Monter que X suit une loi uniforme.

2) Loi de Bernoulli

Définition 5 (loi de Bernoulli) Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit la *loi de Bernoulli de paramètre p*, noté $X \sim \mathscr{B}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \qquad \text{et} \qquad P(X = 1) = p$$

Remarques :

- ⋆ Comme P_X est une probabilité, on a nécessairement $P(X = 0) = 1 - p$.
- ⋆ On dit souvent que p est la probabilité de succès, le succès étant l'événement $(X = 1)$.

Exemple 6

— On lance une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient pile et 0 sinon. Alors $X \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

— Une urne contient 3 boules blanches et 7 noires. On tire au hasard une boule et on note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule est blanche et 0 sinon. Alors $Y \sim \mathscr{B}\left(\frac{3}{10}\right)$.

✎✎✎ **Exercice 5** Soit $A\mathscr{P}(\Omega)$. Déterminer la loi de $\mathbf{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

3) Loi binomiale

Définition 6 (loi binomiale) Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit la *loi binomiale de paramètres n et p*, ce que l'on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si :

- ⋆ $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$;
- ⋆ $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarques :

- ⋆ Ceci définit bien une probabilité sur $[\![0,n]\!]$ car (d'après la formule du binôme) :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \big(p + (1-p)\big)^n = 1$$

- ⋆ On a clairement $\mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$.
- ⋆ La loi $\mathscr{B}(n,p)$ modélise le nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
  En effet, supposons que X compte le nombre de ces succès. Alors on a bien $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et, si $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\Omega = \{\text{succès}, \text{échec}\}^n$ et...

Exemple 7 Soit $(N,r,n) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $r \leqslant N$. On considère une urne contenant N boules dont r rouges. On prélève n boules de l'urne avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges obtenues. Alors $X \sim \mathscr{B}(n, \frac{r}{N})$.

III – Couples de variables aléatoires

Définition 7 Soit $C : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X est *un couple de variables aléatoires* s'il existe deux ensembles non vides E_1 et E_2 tels que $E = E_1 \times E_2$.

Remarque : autrement dit, un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit cartésien.

Dès lors, on peut noter $X = P_E(C)$ la projection de C sur E, c'est-à-dire :

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & P_E(C(\omega)) \end{array} \right.$$

De même, $Y = P_F(C)$, de sorte que l'on puisse réécrire C sous la forme :

$$C = (X,Y) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

1) Loi conjointe et lois marginales

Définition 8 (loi conjointe, lois marginales) ⋆ La loi $P_{(X,Y)}$ est appelée *loi conjointe* du couple (X,Y).

⋆ Les lois P_X et P_Y sont appelée les *lois marginales* du couple (X,Y).

Remarques :

⋆ Comme pour toute variable aléatoire, on a :

$$\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} P\big((X,Y)=(x,y)\big)=1$$

⋆ La loi $P_{(X,Y)}$ est parfois représentée à l'aide d'un tableau à double entrée.

Exemple 8 Soit (X,Y) le couple de variables aléatoires d'univers image $(X,Y)(\Omega)=\{0,1,2\}^2$ et de loi conjointe :

P	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	$0,1$	$0,3$	0
$Y=1$	0	$0,2$	$0,2$
$Y=2$	$0,1$	0	$0,1$

Par exemple, $P\big((X,Y)=(0,2)\big)=0,1$.

Remarque : l'univers image $(X,Y)(\Omega)$ du couple est inclus dans $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ mais on n'a pas toujours égalité. Dans l'exemple ci-dessus, $(0,1)\notin(X,Y)(\Omega)$.

Notation : si $(x,y)\in(X,Y)(\Omega)$, on écrira $P(X=x,Y=y)$ au lieu de $P\big((X,Y)=(x,y)\big)$.

Proposition 4 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires.

⋆ La loi de X est donnée par :

$$\forall x\in X(\Omega),\qquad P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x,Y=y)\qquad \text{(sommation par colonnes)}$$

⋆ La loi de Y est donnée par :

$$\forall y\in Y(\Omega),\qquad P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x,Y=y)\qquad \text{(sommation par lignes)}$$

Démonstration Soit $x\in X(\Omega)$. Comme $\big\{(Y=y)\,\big|\,y\in Y(\Omega)\big\}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales nous donne directement le résultat. ■

Exemple 9 Les lois marginales du couples (X,Y) de l'exemple précédent sont données par :

P	$X=0$	$X=1$	$X=2$	P_Y
$Y=0$	$0,1$	$0,3$	0	$0,4$
$Y=1$	0	$0,2$	$0,2$	$0,4$
$Y=2$	$0,1$	0	$0,1$	$0,2$
P_X	$0,2$	$0,5$	$0,3$	

Remarque : la loi conjointe détermine donc les lois marginales du couple mais la réciproque est fausse.

$X\setminus Y$	0	1	loi de X
0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
loi de Y	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$X\setminus Y$	0	1	loi de X
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
loi de Y	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

2) Loi conditionnelle

Définition 9 Soit $x \in E$ tel que $P(X = x) > 0$. On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ l'application :

$$P_{Y|(X=x)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(Y(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(B|X=x) \end{array} \right.$$

Remarques :

- ⋆ On définit de la même manière la loi conditionnelle $P_{X|Y=y}$ de X sachant $(Y = y)$ pour $y \in F$ tel que $P(Y = y) > 0$.
- ⋆ On montre facilement que les lois conditionnelles sont des probabilités.
- ⋆ Pour tout $(x, y) \in E \times F$ tel que $P(X = x) > 0$, on a :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y|X = x)$$

Connaissant la loi de X et les lois conditionnelles, on peut obtenir la loi conjointe du couple.

✎✎✎ **Exercice 6** Soit une urne contenant trois boules blanches et quatre boules rouges. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires qui valent 1 si la boule tirée est blanche, 0 sinon.
$X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) = \{0, 1\}^2$

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) ainsi que ses lois marginales.

$X_1 \setminus X_2$	0	1	loi de X
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
loi de Y	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

car par exemple $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2/R_1)$ (formule des probabilités composées avec $P(R_1) \neq 0$)
ainsi $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$

2. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant que $X_2 = 1$:
$P(X_1 = 0/X_2 = 1)\dfrac{P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0)}{P(X_2 = 1)} = \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$
et $P(X_1 = 1/X_2 = 1)\dfrac{P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)}{P(X_2 = 1)} = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$

3) Généralisation

La notion de couple se généralise facilement au cas de n variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Il y a alors n lois marginales et on peut définir, de la même façon, la notion de loi conditionnelle.

IV – Indépendance

1) Cas de deux variables aléatoires

Soient $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow E$ deux variables aléatoires.

Définition 10 (indépendance de deux variables aléatoires) On dit que X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$, on a :

$$P\big((X \in A) \cap (Y \in B)\big) = P(X \in A)P(Y \in B),$$

c'est-à-dire :

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exemple 10 On lance successivement deux fois un dé et on note X et Y les résultats obtenus. Alors X et Y sont indépendantes.

Proposition 5 Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \qquad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Démonstration ($\Rightarrow$) Supposons que X et Y soient indépendantes. Soit $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Les choix $A = \{x\} \in \mathscr{P}(X(\omega))$ et $B = \{y\} \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$ fournissent directement le résultat souhaité.

($\Leftarrow$) Supposons maintenant que :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \qquad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$. Alors :

$$\begin{aligned} P\big((X,Y) \in A \times B\big) &= \sum_{(a,b) \in A \times B} P\big((X,Y) = (a,b)\big) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a, Y = b) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a)P(Y = b) \qquad \text{(par hypothèse)} \\ &= \left(\sum_{a \in A} P(X = a)\right)\left(\sum_{b \in B} P(Y = b)\right) \\ &= P(X \in A)P(Y \in B) \end{aligned}$$

■

Proposition 6 Soient $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires et $f : E \longrightarrow G$ et $g : F \longrightarrow H$ deux applications. Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(f(X(\Omega))) \times \mathscr{P}(g(Y(\Omega)))$. Alors :

$$P\big((f(X), g(Y)) \in A \times B\big) = P\big((f(X) \in A) \cap (g(Y) \in B)\big) = P\big((X \in f^{-1}(A)) \cap (Y \in g^{-1}(B))\big)$$

On conclut en utilisant l'indépendance de X et Y. ■

Exemple 11 Par exemple, si X et Y sont des variables aléatoires réelles indépendantes, alors les variables $X^2 + 3$ et $\sin(Y)$ sont indépendantes.

2) Généralisation

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, une variable aléatoire $X_k : \Omega \longrightarrow E_k$.

Définition 11 (indépendance mutuelle) On dit que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont *mutuellement indépendantes* si :

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \cdots \times \mathscr{P}(X_n(\Omega)), \qquad P\big((X_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\big) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in A_k)$$

c'est-à-dire :

$$P_{(X_1,\dots,X_n)}(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_{X_1}(A_1) \dots P_{X_n}(A_n)$$

Remarque : une telle famille de variables aléatoires peut modéliser une suite d'expériences aléatoires indépendantes.

On a la même caractérisation que pour deux variables.

Proposition 7 Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont *mutuellement indépendantes* si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \qquad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

Lemme 1 (des coalitions) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, $m \in [\![1, m]\!]$ et $f : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ et $g : E_{m+1} \times \cdots \times E_n \longrightarrow G$ deux fonctions. Alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration

Remarque : le résultat reste vrai si on considère plus de deux coalitions. Par exemple, si $X, Y, Z, T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mutuellement indépendantes, alors $\sin(X)$, Y^2 et $Z - T$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition 8 Soient $p \in [0, 1]$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{B}(n, p)$$

Démonstration On utilise un raisonnement par récurrence sur le nombre n de variables aléatoires dans la somme.
Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer puisque $\mathscr{B}(1, p) = \mathscr{B}(p)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie et considérons $n + 1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ de loi $\mathscr{B}(p)$.

- ⋆ On sait que $(X_1 + \cdots + X_n)(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (hypothèse de récurrence) et $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$ donc :

$$(X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1})(\Omega) = [\![0, n + 1]\!]$$

- ⋆ Soit $k \in [\![1, n + 1]\!]$. Alors (d'après la formule des probabilités totales) :

$$\begin{aligned}
P(X_1 + \cdots + X_{n+1} = k) &= P(X_1 + \cdots + X_n = k, X_{n+1} = 0) + P(X_1 + \cdots + X_n = k, X_{n+1} = 1) \\
&= P(X_1 + \cdots + X_n = k)P(X_{n+1} = 0) + P(X_1 + \cdots + X_n = k - 1)P(X_{n+1} = 1) \\
&= (1 - p)\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} + p\binom{n}{k-1} p^{k-1}(1 - p)^{n-k+1} \\
&= \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] p^k (1 - p)^{n+1-k} \\
&= \binom{n+1}{k} p^k (1 - p)^{n+1-k}
\end{aligned}$$

d'après la formule du triangle de Pascal. La formule est immédiate si $k = 0$, d'où le résultat. ■

Interprétation : si on répète n épreuves identiques et indépendantes ayant la probabilité p de succès, alors la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$.

V – Espérance

1) Définition

Définition 12 (espérance) Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *espérance de X*, noté $E(X)$, la quantité :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

L'espérance de X est un *indicateur de position* : il s'agit de la valeur moyenne prise par la variable aléatoire (plus précisément, on pondère les valeurs prises par X de la probabilité d'occurrence correspondante).

Exemple 12 — On lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu. Alors $E(X) = \dfrac{7}{2}$.

— Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $X \sim \mathscr{U}(n)$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

Définition 13 (variable centrée) Une variable aléatoire est dite *centrée* si $E(X) = 0$.

Proposition 9 Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

Démonstration On sait que $\big\{(X = x) \,\big|\, x \in X(\Omega)\big\}$ est un système complet d'événements donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{x \in X(\omega)} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\omega)} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} x\mathbb{P}(\{x\}) \\
&= \sum_{x \in X(\omega)} x \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbb{P}(\{x\}) \\
&= \sum_{x \in X(\omega)} x\,\mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}) \\
&= \sum_{x \in X(\omega)} x\,\mathbb{P}(X = x),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

✎✎✎ **Exercice 7** Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Montrer que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Une solution.
D'après la proposition précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) &= \sum_{\omega\in A} \mathbf{1}_A(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega\setminus A} \mathbf{1}_A(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la définition : l'univers image de $\mathbf{1}_A$ est $\{0,1\}$ (valeurs prises par une indicatrice) donc :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = 0\times\mathbb{P}(\mathbf{1}_A=0) + 1\times\mathbb{P}(\mathbf{1}_A=1) = \mathbb{P}(A)$$

puisque $\big\{\omega\in\Omega \,\big|\, \mathbf{1}_A(\omega)\big\} = A$.

2) Espérance des lois usuelles

(a) Variable constante

Une variable aléatoire $X:\Omega\longrightarrow E$ est dite constante s'il existe $e\in E$ tel que $P(X=e)=1$ (il est équivalent de dire que $X(\Omega)=\{e\}$).

Proposition 10 Si X est une variable aléatoire constante égale à e, alors $\mathbb{E}(X)=e$.

Démonstration On a effectivement $\mathbb{E}(X) = e\times\mathbb{P}(X=e) = e$ (par définition de l'espérance). ■

Remarque : soit X une variable aléatoire (quelconque). En notant $\mathbb{E}(X)$ la variable aléatoire constante $\mathbb{E}(X)\mathbf{1}_\Omega$, on a l'égalité :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)$$

(b) Loi uniforme

Proposition 11 Soit $X\sim\mathscr{U}(E)$, où $E=\big\{x_1,\ldots,x_n\big\}$ est un ensemble fini. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Dans le cas particulier où $E=[\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

Démonstration C'est immédiat. ■

Remarque : l'espérance de X est ici la moyenne arithmétique des valeurs prises par X.

(c) Loi de Bernoulli

Proposition 12 Soient $p\in[0,1]$ et $X\sim\mathscr{B}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = p$$

Démonstration On a :

$$\mathbb{E}(X) = 0\times\mathbb{P}(X=0) + 1\times\mathbb{P}(X=1) = p$$

(d) Loi binomiale

Proposition 13 Soient $(n,p) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = np$$

Démonstration Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np\big(p+(1-p)\big)^{n-1} \\
&= np,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

3) Propriétés générales de l'espérance

Proposition 14 Soient $X, Y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

(i) si $X \geqslant 0$ (c'est-à-dire $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ (*positivité de l'espérance*) ;

(ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(X+\lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda\mathbb{E}(Y)$ (*linéarité de l'espérance*) ;

(iii) si $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$ (*croissance de l'espérance*) ;

(iv) $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$;

(v) La variable aléatoire X est centrée.

Démonstration (i) Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_n\}$ et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbb{P}(X=x_k) \geqslant 0$$

comme somme de produits de nombres positifs ou nuls.

(ii) On a :

$$\mathbb{E}(X+\lambda Y) = \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)+\lambda Y(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\})$$

et il suffit d'utiliser la linéarité de la somme.

(iii) On a $Y - X \geqslant 0$ puis on utilise (i) et (ii).

(iv) D'après l'inégalité triangulaire pour les sommes, on a :

$$|\mathbb{E}(X)| = \left|\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\right| \leqslant \sum_{x\in X(\Omega)} |x|\underbrace{\mathbb{P}(X=x)}_{\geqslant 0} = \mathbb{E}(|X|)$$

(v) Il suffit d'utiliser (iii). ■

Proposition 15 (formule de transfert) Soient $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Démonstration On sait que $\{(X = x) \mid x \in X(\Omega\}$ est un système complet d'événements donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} f(X(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarques :

- ⋆ Un couple de variables aléatoires étant une variable aléatoire par définition, on a pour tout fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} f(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

- ⋆ L'espérance de $f(X)$ est donc complètement déterminée par la loi de X (il est donc inutile de déterminer la loi de $f(X)$).

✎✎✎ **Exercice 8** Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.15	0.2	0.3	0.1	0.05	0.2

Déterminer l'espérance de $Z = |X|$.

✎✎✎ **Exercice 9** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}(n)$. Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$.

4) Lien avec l'indépendance

Proposition 16 Soient $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. Alors :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration Le théorème de transfert nous donne (on considère la fonction $f : (x, y) \in (X, Y)(\Omega) \longmapsto xy$) :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{((x,y) \in (X,Y)(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{(x \in X(\Omega)} \sum_{(y \in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}Y = y)$$

d'où le résultat par linéarité de la somme. ■

Remarques :

- ⋆ Attention, la réciproque de la proposition est fausse. Par exemple, si X suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, alors $\mathbb{E}(X) = 0$ donc $\mathbb{E}(X)^2 = 0$, tandis que $\mathbb{E}(X)^2) = 1$. Par contre, la variable aléatoire X n'est pas indépendante avec elle-même (calculer $\mathbb{P}(X = 1, X = -1)$ pour s'en convaincre).
- ⋆ Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, alors on a aussi :

$$\mathbb{E}(X_1 \dots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \dots \mathbb{E}(X_n)$$

On démontre ceci par récurrence.

VI – Variance et écart-type

1) Définitions

Définition 14 (variance) Soit X une variable aléatoire réelle.

- ⋆ On appelle *variance de* X, notée $V(X)$, la quantité :

$$V(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) (\geqslant 0)$$

- ⋆ On appelle *écart-type de* X, noté $\sigma(X)$, la quantité :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

- ⋆ La variable aléatoire X est dite *réduite* si $V(X) = 1$.

Remarque : on dit que la variance est un paramètre de dispersion. Plus $V(X)$ est petit et plus, en moyenne, les valeurs de $(X - \mathbb{E}(X))^2$ sont petites. Ceci signifie que X prend des valeurs resserrées autour de sa valeur moyenne $\mathbb{E}(X)$.

Le résultat suivant permet un calcul pratique de la variance.

Proposition 17 (formule de Kœnig-Huygens) Soit X une variable aléatoire réelle. Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul (on utilise la linéarité de l'espérance) :

$$\begin{aligned} V(X) = \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)^2\big) &= \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2, \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée. ■

✎✎✎ **Exercice 10** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}(n)$. Déterminer $V(X)$.

2) Variance des lois usuelles

(a) Cas des variables constantes

Proposition 18 Soit X une variable aléatoire. Alors $V(X) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$ (on dit que X est *presque sûrement constante*).

Démonstration D'après la formule de transfert :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{(x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)}_{\geqslant 0}$$

donc :

$$\begin{aligned} V(X) = 0 &\iff \forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) \text{ ou } x = \mathbb{E}(X) \\ &\iff \forall x \in X(\Omega) \setminus \{\mathbb{E}(X)\},\ \mathbb{P}(X = x) = 0 \\ &\iff \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1 \end{aligned}$$

car $\sum_{x \in X(\Omega} \mathbb{P}(X = x) = 1$. ■

(b) Loi de Bernoulli

Proposition 19 Soient $p \in [0,1]$ et $X \sim \mathscr{B}(p)$. Alors :

$$V(X) = p(1-p)$$

Démonstration Comme $X(\Omega) = \{0,1\}$, on a $X^2 = X$ et alors (formule de Kœnig-Huygens) :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

(c) Loi binomiale

Proposition 20 Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Alors :

$$V(X) = np(1-p)$$

Démonstration On l'a fait dans la section précédente pour $n = 1$. On peut maintenant supposer que $n \geqslant 2$. On utilise la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X(X-1)) + np - n^2p^2 \end{aligned}$$

puisque $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. La formule de transfert nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} (k-1)k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}p^\ell(1-p)^{n-2-\ell} \\ &= n(n-1)p^2\big(p+(1-p)\big)^{n-2} \\ &= n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p),$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

3) Propriétés

Proposition 21 Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

(i) $V(aX+b) = a^2V(X)$;

(ii) $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

Démonstration La formule (ii) est une conséquence immédiate de (i). Par définition de la variance d'une variable aléatoire, on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}\big((aX+b)-\mathbb{E}(aX+b))^2\big) \\ &= \mathbb{E}\big(aX+b-a\mathbb{E}(X)-b)^2\big) \qquad \text{(linéarité de l'espérance)} \\ &= a^2\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))\big)^2 \qquad \text{linéarité de l'espérance)} \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

■

> **Corollaire 1** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle telle que $V(X) > 0$. Alors la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{V(X)}$ est centrée réduite.

Démonstration En notant Y cette variable aléatoire, on montre facilement que $\mathbb{E}(Y) = 0$ (linéarité de l'espérance) et $V(Y) = 0$ (en utilisant la proposition qui précède). ■

Exemple 13 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^*\times]0,1[$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. La variable aléatoire $\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est centrée réduite.

VII – Covariance

1) Définition

> **Définition 15 (covariance)** Soient $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. On appelle *covariance* de X et Y la quantité :
>
> $$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\big)$$

Remarques :

- ⋆ On a donc $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{V}(X)$.
- ⋆ Si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, on dit que les variables aléatoires X et Y sont *décorrélées.*

On dispose d'une formule (de Kœnig-Huygens) permettant de calculer en pratique une covariance.

> **Proposition 22** Soient $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Alors :
>
> $$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration Il suffit de développer le membre de droite et d'utiliser la linéarité de l'espérance. ■

Remarque : on calcule $\mathbb{E}(XY)$ en utilisant la formule de transfert appliquée à la fonction $f : (x,y) \longmapsto xy$.

✎✎✎ **Exercice 11** Soit (X,Y) le couple de variables aléatoire de loi conjointe :

$X \setminus Y$	2	3	4	loii de X
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
loi de Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	

Déterminer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Corollaire 2 Si $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Démonstration En effet, comme $X \perp\!\!\!\perp Y$, on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\mathbb{E}(Y)$, d'où le résultat. ■

Remarque : attention, la réciproque est fausse. On peut avoir des variables aléatoires réelles X et Y non indépendantes et telles que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Exemple 14 Considérons $X \sim \mathscr{U}(\{-1,0,1\})$ (loi uniforme sur l'ensemble $E = \{-1,0,1\}$) et posons $Y = X^2$.

- ⋆ Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. En effet (par exemple) :

$$\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{9}$$

et :

$$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(X=1, X=0) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \neq \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0)$$

- ⋆ Par ailleurs, on a $XY = X^3 = X$ (puisque l'univers image de X est $\{-1,0,1\}$ donc :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

✎✎✎ **Exercice 12** On tire deux boules simultanément dans une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4. Soit X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand. Déterminer la covariance de X et Y.

2) Propriétés

Proposition 23 Soientt X, X', Y et Y' des VAR alors la covariance est :

- symétrique : $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$
- bilinéaire :
  - ⋆ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{cov}(\lambda X + X', Y) = \lambda\,\mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(X',Y)$
  - ⋆ $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $\mathrm{cov}(X, \mu Y + Y') = \mu\,\mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(X,Y')$
- positive : $\mathrm{cov}(X,X) = V(X) \geqslant 0$

Démonstration C'est immédiat. ■

Proposition 24 Soient $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Alors :

(i) $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(ii) $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Si X et Y sont décorrélées (donc en particulier si $X \perp\!\!\!\perp Y$), alors :

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration On démontre (i) (c'est le même calcul pour (ii)). On a :

$$V(X+Y) = \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) = \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(Y,Y)$$

par bilinéarité de la covariance. On conclut en utilisant la symétrie et le fait que $\mathrm{Cov}(Z,Z) = \mathrm{V}(Z)$. ■

On peut généraliser la formule précédente.

Proposition 25 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles. Alors :

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

En particulier, si les variables sont deux à deux décorrélées (ce qui est le cas si elles sont deux à deux indépendantes), alors :

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul. ■

Application : retour au calcul de la variance relative à la loi binomiale.
Remarquons que la variance d'une variable aléatoire ne dépend pas de la variable mais de sa loi. Or, on sait que si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$, alors $S = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{B}(n,p)$. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ étant deux à deux indépendantes (donc décorrélées), la proposition précédente implique que :

$$V(S) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

On retrouve la formule obtenue par un calcul direct pour la variance d'une loi binomiale.

VIII – Inégalités probabilistes

1) Inégalité de Markov

Théorème 1 (inégalité de Markov) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives ou nulles. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad P(X \geqslant t) \leqslant \frac{E(X)}{t}$$

Démonstration Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a les inégalités :

$$\mathbf{1}_{X \geqslant t} t \leqslant \mathbf{1}_{X \geqslant t} X \leqslant X$$

donc, par linéarité et croissance de l'espérance :

$$tE(\mathbf{1}_{X \geqslant t}) \leqslant E(X)$$

d'où le résultat en divisant par $t > 0$ et car $E(\mathbf{1}_{X \geqslant t}) = P(X \geqslant t)$. ■

Exemple 15 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Comme X est à valeurs positives, on a :

$$\forall t > 0, \qquad P(X \geqslant t) \leqslant \frac{np}{t}$$

Remarques.

- ⋆ On s'attend à ce que la probabilité $P(X \geqslant t)$ soit d'autant plus faible que $E(X)$ (valeur moyenne prise par X) soit petite et t soit grand (puisque $t \in longmapstoP(X \geqslant t)$ est décroissante). L'inégalité de Markov précise quantitativement cette observation.
- ⋆ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et pour toute variable aléatoire X, on a donc :

$$P(|X| \geqslant t) \leqslant \frac{E(|X|)}{t}$$

✎✎✎ **Exercice 13** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois un dé équilibré et on note X le nombre de 6 obtenus. Estimer la probabilité qu'au moins la moitié des lancers aient donné un 6 à l'aide de l'inégalité de Markov.

Une solution

On répète $2n$ fois la même épreuve de Bernoulli (qui consiste à lancer un dé) dont le succès (à savoir obtenir un 6) a pour probabilité $\frac{1}{6}$ (le dé étant équilibré). La variable aléatoire X correspond au nombre de 6 obtenus donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}\big(2n, \frac{1}{6}\big)$. La variable aléatoire X est donc positive et admet une espérance (qui vaut $\frac{n}{3}$) donc, d'après l'inégalité de Markov,

$$\forall \lambda > 0, \qquad \mathrm{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{n}{3\lambda}$$

Pour $\lambda = n > 0$, on a :

$$\mathrm{P}(X \geqslant n) \leqslant \frac{1}{3}$$

2) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(X)}{t^2}$$

Démonstration Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après l'inégalité de Markov, appliqué à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ qui est positive, et au réel $t^2 > 0$, on a :

$$P\big((X - E(X))^2 \geqslant t^2\big) \leqslant \frac{E\big((X - E(X))^2\big)}{t^2} = \frac{V(X)}{t^2}$$

On remarque ensuite que $\big((X - E(X))^2 \geqslant t^2\big) = \big(|X - E(X)| \geqslant t\big)$, d'où le résultat. ■

Remarque : On s'attend à ce que la probabilité $P(|X - E(X)| \leqslant t)$ soit petite quand t est grand (puisque $|X - E(X)|$ représente la distance de X à sa valeur moyenne) ou que la variance de X soit petite (ce qui signifie que, en moyenne, X prend des valeurs resserrées autour de $E(X)$). L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev précise quantitativement cette observation.

✎✎✎ **Exercice 14** On lance un dé équilibré. Combien de fois faut-il le lancer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du numéro 1 au cours de ces n lancers sera dans l'intervalle $\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{100}, \frac{1}{6} + \frac{1}{100}\right]$?