Espaces prehilbertiens réels

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel *réel* de dimension quelconque.

I – Généralités

1) Produit scalaire

Définition 1 (produit scalaire) On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ⋆ φ est une *forme bilinéaire* sur E, c'est-à-dire :

$$\forall x, y, z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x + \lambda y, z) = \varphi(x, z) + \lambda \varphi(y, z) \qquad \text{(linéarité à gauche)}$$

  et :

$$\forall x, y, z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(z, x + \lambda y) = \varphi(z, x) + \lambda \varphi(z, y) \qquad \text{(linéarité à droite)}$$

- ⋆ φ est *symétrique*, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E, \qquad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

- ⋆ φ est *définie*, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \qquad \varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$$

- ⋆ φ est *positive*, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \qquad \varphi(x, x) \geqslant 0$$

Notation. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est généralement noté $x \cdot y$, ou $(x \,|\, y)$, ou $\langle x, y \rangle$.

Remarques :

- ⋆ Attention à la notion de positivité pour un produit scalaire !
- ⋆ Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors :

$$\forall x \in E, \qquad \langle x, 0_E \rangle = \langle 0_E, x \rangle = 0$$

Démonstration Soit $x \in E$. On a $\langle x, 0_E \rangle = \langle 0_E, \rangle$ par symétrie d'un produit scalaire. De plus :

$$\langle x, 0_E \rangle = \langle x, 2 \cdot 0_E \rangle = 2 \langle x, 0_E \rangle$$

par linéarité à droite du produit scalaire. On a donc bien $\langle x, 0_E \rangle = 0$. ■

2) Trois exemples

(a) Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

En terminale, on a défini le produit scalaire de deux vecteurs $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Ce produit scalaire se généralise facilement dans $\mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Proposition/définition 1 (produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On appelle *produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$ l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{array} \right. \tag{PS1}$$

Démonstration ⋆ La bilinéarité de l'application est une conséquence immédiate de la linéarité de la somme.

⋆ La symétrie est claire (par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$).

⋆ Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$$

car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $x_k^2 \geqslant 0$ (puisque x_k est un nombre réel) et car une somme de nombres positifs est positive. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc positive.

⋆ Enfin (avec les mêmes notations) :

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff (\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k|^2 = 0) \iff (\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0) \iff x = 0_E$$

car (pour la première équivalence) une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun des nombres dans la somme est nul. On en déduit que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Finalement l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. ■

Expression matricielle du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$: soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Considérons les matrices X et Y des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^\top Y = Y^\top X$$

(b) Produits scalaires intégraux dans $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}[X]$

Proposition 1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère l'espace vectoriel réel (de dimension infinie) $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. L'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t) g(t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right. \tag{PS2}$$

est un produit scalaire sur E.

Démonstration ⋆ Par linéarité de l'intégrale, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche et comme elle est clairement symétrique, elle est bilinéaire.

⋆ Pour tout $f \in E$, on a $\langle f, f \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale car la fonction f^2 est continue et positive et car $a \leqslant b$. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.

⋆ Soit $f \in E$ tel que $\langle f, f \rangle = 0$. La fonction f^2 étant positive et continue sur $[a, b]$, le théorème de nullité de l'intégrale implique que f^2 est nulle sur $[a, b]$. Donc $f = 0_E$. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E. ■

(c) Produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Proposition 2 (produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^\top B) \end{array} \right. \tag{PS3}$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelé produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Démonstration ⋆ Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la transposition et de la trace, on a :

$$\begin{aligned} \langle A + \lambda B, C \rangle = \mathrm{Tr}((A + \lambda B)^\top C) = \mathrm{Tr}(A^\top C + \lambda B^\top C) &= \mathrm{Tr}(A^\top C) + \lambda\, \mathrm{Tr}(B^\top C) \\ &= \langle A, C \rangle + \lambda \langle B, C \rangle \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.

⋆ De plus, pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B) = \mathrm{Tr}\big((B^\top A)^\top\big) &= \mathrm{Tr}(B^\top A) \qquad \text{(propriété de la trace)} \\ &= \langle B, A \rangle \end{aligned}$$

donc l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique. On déduit donc du point précédant que cette application est bilinéaire.

⋆ Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :

$$A^\top = (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \qquad \text{et} \qquad A^\top A = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$$

donc :

$$\langle A, A \rangle = \mathrm{Tr}\left(A^\top A\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(A^\top A\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geqslant 0$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive. De plus :

$$\langle A, A \rangle = 0 \iff (\forall (i,k) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!],\ a_{k,i} = 0) \iff A = 0_{n,p}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. ■

Définition 2 (espace préhilbertien, espace euclidien) On appelle *espace préhilbertien réel* la donnée d'un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où :

- ⋆ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
- ⋆ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Si de plus E est de dimension finie, alors on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un *espace euclidien.*

Exemple 1 En reprenant les notations des exemples précédents :

- ⋆ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien (de dimension n) ;
- ⋆ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $(\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel ;
- ⋆ pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

Remarques :

- ⋆ On dira parfois simplement que « E est un espace préhilbertien réel/euclidien » lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur le produit scalaire utilisé.
- ⋆ Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

II – Norme associée à un produit scalaire

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1) Définition et exemples

Définition 3 (norme euclidienne) On appelle *norme euclidienne sur E associée au produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application notée $\|\cdot\|$ suivante :

$$\|\cdot\| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array} \right.$$

Remarques :

- ⋆ La positivité du produit scalaire justifie l'existence de la norme.
- ⋆ On a $\|0_E\| = 0$.

Exemple 2 Les normes $\|\cdot\|$ associées aux trois produits scalaires (PS_1), (PS_2) et (PS_3) précédents sont définis par :

- ⋆ $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$;
- ⋆ $\forall f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f(t)^2 \,\mathrm{d}t}$;
- ⋆ $\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \|A\| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2\right)^{1/2}$.

2) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Rappel : deux vecteurs x et y de E sont dits colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$. Le vecteur nul 0_E est colinéaire à tout vecteur de E ((puisque : $\forall x \in E,\ 0_E = 0 \cdot x$).

Proposition 3 (inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Démonstration Soient $x, y \in E$.

- ⋆ Si $y = 0_E$, alors $\langle x, y\rangle = \langle x, 0_E\rangle = 0$ et $\|y\| = \sqrt{\langle 0_E, 0_E\rangle} = 0$. Donc on a bien l'inégalité annoncée (c'est en fait une égalité, les deux nombres mis en jeu valant 0) ; de plus, les vecteurs x et y sont colinéaires dans ce cas.
- ⋆ Supposons maintenant que $y \neq 0$ et considérons la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 \geqslant 0$$

Par symétrie et bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad P(\lambda) &= \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle \\ &= \|y\|^2\lambda^2 + 2\langle x,y\rangle\lambda + \|x\|^2\end{aligned}$$

Ainsi, P est une fonction polynomiale du second degré (comme $y \neq 0_E$, on a $\|y\|^2 = \langle y,y\rangle > 0$) qui est à valeurs positives. On en déduit que son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire que :

$$4\langle x,y\rangle^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2 \leqslant 0 \qquad \text{soit encore} \qquad |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Il reste à établir le cas d'égalité pour $y \neq 0_E$. On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si le discriminant Δ de P est nul, c'est-à-dire si et seulement si P admet une racine réelle double. Le produit scalaire étant défini, cela revient à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x + \alpha y = 0$. ■

Remarque : pour tous $x, y \in E \setminus \{0_E\}$, on a donc $\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \in [-1,1]$.

Exemple 3 ⋆ Pour (PS1), l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{1/2}$$

⋆ Pour (PS2), elle s'écrit :

$$\forall f,g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}), \qquad \left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

⋆ Et pour (PS3) :

$$\forall A,B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{Tr}(A^\top AB) \leqslant \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)\,\mathrm{Tr}(B^\top B)}$$

3) Propriétés de la norme

Proposition 4 (propriétés de la norme) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\cdot\|$ est :

⋆ *positive*, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \qquad \|x\| \geqslant 0$$

⋆ *définie*, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0_E$$

⋆ *homogène*, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E, \qquad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$$

⋆ *vérifie l'inégalité triangulaire*, c'est-à-dire :

$$\forall x,y \in E, \qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$ (ce qui signifie que les vecteurs x et y sont colinéaires de même sens).

Rappel : $\forall t \in \mathbb{R},\ t \leqslant |t|$

Démonstration Les trois premières propriétés sont immédiates (elles découlent des propriétés du produit scalaire).

- ⋆ Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \qquad \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \qquad (1) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

  Par croissance de la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$, on conclut bien que $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- ⋆ Supposons maintenant que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors on a aussi $\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. L'inégalité (1) entraîne alors l'égalité $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$. Par conséquent, nous sommes dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; les vecteurs x et y sont sont colinéaires.
  Réciproquement, supposons que x et y soient colinéaires. Par exemple, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. Alors :

$$\begin{aligned}\|x+y\| = \|x\| + \|y\| &\iff |1+\lambda|\,\|x\| = (1+|\lambda|)\|x\| \\ &\iff x = 0_E \text{ ou } |1+\lambda| = 1+|\lambda| \\ &\iff x = 0_E \text{ ou } \lambda \geqslant 0\end{aligned}$$

  car :

$$|1+\lambda| = 1+|\lambda| \iff (1+\lambda)^2 = (1+|\lambda|)^2 \iff \lambda = |\lambda|$$

  Le cas d'égalité est donc établi. ■

Proposition 5 (deuxième partie de l'inégalité triangulaire) Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$$

Démonstration Soient $x, y \in E$. Alors :

$$x = (x-y) + y \qquad \text{donc} \qquad \|x\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$$

d'après l'inégalité triangulaire. En procédant de manière analogue pour y, on a :

$$\|y\| \leqslant \|y-x\| + \|x\| = \|x-y\| + \|x\|$$

par homogénéité de la norme. Donc :

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\| \qquad \text{et} \qquad \|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|$$

ou encore :

$$-\|x-y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$$

d'où l'on tire l'inégalité annoncée. ■

Remarque : on a donc

$$\forall x, y \in E, \qquad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Définition 4 (vecteur unitaire) Un vecteur x de E est dit *unitaire* s'il est de norme 1, c'est-à-dire si $\|x\| = 1$.

Remarque : si x est un vecteur non nul de E, alors il existe exactement deux vecteurs colinéaires à x et unitaires. Il s'agit des vecteurs $x_- = \dfrac{-1}{\|x\|}x$ et $x_+ = \dfrac{1}{\|x\|}x$.

Exemple 4
- ⋆ Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, $x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ est unitaire.
- ⋆ Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de son produit scalaire canonique), $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{I}_n$ est un vecteur unitaire (pour la norme issue de (PS_3)).
- ⋆ Dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, le vecteur $f : t \longmapsto \sqrt{2n+1}\,t^n$ est unitaire (pour (PS_2)).

4) Distance euclidienne

On peut définir la distance entre deux vecteurs à partir de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur l'espace préhilbertien réel E.

Définition 5 (distance euclidienne) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel (de norme associée $\|\cdot\|$). On appelle *distance euclidienne* sur E l'application :

$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array} \right.$$

Remarque : dans $\mathbb{R}^2$ (idem dans $\mathbb{R}^3$) muni du produit scalaire canonique, on retrouve la distance usuelle. Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

Les propriétés d'une distance sont les suivantes.

Proposition 6 Soit d la distance euclidienne sur l'espace préhilbertien réel $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. L'application d est :

- ⋆ *positive*, c'est-à-dire :
$$\forall x, y \in E, \qquad d(x,y) \geqslant 0$$
- ⋆ *définie*, c'est-à-dire :
$$\forall x, y \in E, \qquad d(x,y) = 0 \iff x = y$$
- ⋆ *symétrique*, c'est-à-dire :
$$\forall x, y \in E, \qquad d(x,y) = d(y,x)$$
- ⋆ vérifie l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire :
$$\forall x, y, z \in E, \qquad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

Démonstration Les propriétés sont immédiates à vérifier ; la dernière repose sur l'inégalité triangulaire vérifiée par $\|\cdot\|$. ■

✎✎✎ **Exercice 1** Calculer $d(f,g)$ où $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto x^2$ pour le produit scalaire (PS2).

5) Formulaire

Les formules suivantes sont très utiles en pratique.

Proposition 7 (formulaire) Soient $x, y \in E$.

- ⋆ **Identités remarquables :**
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
- ⋆ **Formules de polarisation :**
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$
- ⋆ **Identité du parallélogramme :**
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Démonstration Il suffit de développer les carrés. ■

III – Orthogonalité

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1) Vecteurs orthogonaux

Définition 6 (vecteurs orthogonaux) Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont *orthogonaux*, notée $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemple 5
- ⋆ Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire canonique).
- ⋆ Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2$ sont orthogonales dans $\mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire (PS2), mais pas dans $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Remarques :
- ⋆ Pour tout $x \in E$, on a $x \perp 0_E$.
- ⋆ Réciproquement, si un vecteur x est orthogonal à tous les vecteurs de E (c'est-à-dire si : $\forall y \in E,\ \langle x, y \rangle = 0$), alors en particulier $\langle x, x \rangle = 0$ et comme le produit scalaire est défini, on a $x = 0_E$.

Définition 7 (famille orthogonale de vecteurs) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$.
- ⋆ On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est *orthogonale* si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad i \neq j \implies x_i \perp x_j$$

- ⋆ Si les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont de plus unitaires, on dit que la famille est *orthonormée* (ou *orthonormale*).

Remarque : une famille $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est donc orthonormée si

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \langle x_i, x_k = \delta_{i,j}$$

Exemple 6
- ⋆ La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormée pour le produit scalaire canonique.
- ⋆ Dans $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (muni de (PS_2)), la famille (f, g, h) est orthogonale, où

$$f : x \longmapsto 1, \qquad g : x \longmapsto x - \frac{1}{2}, \qquad \text{et} \qquad h : x \longmapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

Proposition 8 (liberté et orthogonalité) Dans un espace préhilbertien réel, toute famille orthogonale constituée de vecteurs *non nuls* est libre.

Remarque : si le vecteur nul fait partie des vecteurs de la famille, alors celle-ci est liée.

Démonstration Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$ et fixons $\ell \in [\![1, n]\!]$. On va montrer que $\lambda_\ell = 0$. On a :

$$\begin{aligned} 0 = \langle 0_E, x_\ell \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_k, x_\ell \rangle \qquad \text{(bilinéarité du produit scalaire)} \\ &= \lambda_\ell \|x_\ell\|^2 \qquad \text{(par définition de la famille)} \end{aligned}$$

Comme $x_\ell \neq 0_E$, on a $\|x_\ell\|^2 \neq 0$ (la norme étant définie), ce qui implique que $\lambda_\ell = 0$. ■

Théorème 1 (Pythagore) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale. Alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

Démonstration Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \langle x_k, x_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

par hypothèse sur la famille. ■

Remarque : dans le cas où $n = 2$, la réciproque du théorème de Pythagore est vraie. En effet, pour tous $x, y \in E$ tels que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, on a (en utilisant l'identité remarquable) $2\langle x, y \rangle = 0$, c'est-à-dire $x \perp y$.

2) Orthogonal d'une partie de E

Définition 8 (orthogonal d'une partie) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On appelle *orthogonal de A*, noté $A^\perp$, le sous-ensemble de E suivant :

$$A^\perp = \left\{ x \in E \,\middle|\, \forall a \in A,\ x \perp a \right\}$$

Remarque : l'orthogonal de A est donc l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous ceux de A. On a toujours $0_E \in A^\perp$.

Exemple 7 Soit $A = \{(1, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Déterminons $A^\perp$ (ici, on considère le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$). Pour tout $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$x \in A^\perp \iff \langle (a, b, c), (1, 1, -1) \rangle = 0 \iff a + b - c = 0$$

Ainsi, $A^\perp$ est l'(hyper)plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x+y-z = 0$. Une base de ce plan est $\big((1, 0, 1), (1, 1, 2)\big)$.

✎✎✎ **Exercice 2** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal du plan d'équation cartésienne $x + 2y - z = 0$.

Les propriétés de l'orthogonal d'une partie sont les suivantes.

Proposition 9 (propriétés de l'orthogonal) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors :

- ⋆ $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$;
- ⋆ $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- ⋆ $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$;
- ⋆ $A \subset (A^\perp)^\perp$;
- ⋆ si A est un sous-espace vectoriel de E, on a $A \cap A^\perp = \{0_E\}$.

Démonstration Soit $A \in \mathscr{P}(E)$.

- ⋆ Il est clair que $0_E \in E^\perp$ donc $\{0_E\} \subset E^\perp$. Soit maintenant $x \in E^\perp$. Alors en particulier $x \perp x$ (puisque $x \in E$). On a alors $x = 0_E$ (la norme étant définie). On a donc l'inclusion réciproque $E^\perp \subset \{0_E\}$. Ainsi, $E^\perp = \{0_E\}$. Par ailleurs, $E \subset \{0_E\}^\perp$ (puisque tout vecteur de E est orthogonal à 0_E). L'inclusion réciproque étant claire, on a l'égalité $\{0_E\}^\perp = E$.
- ⋆ Il est clair que $A^\perp$ est un sous-ensemble de E qui contient 0_E. Vérifions maintenant que $A^\perp$ est stable par combinaisons linéaires. Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times (A^\perp)^2$. Pour tout $a \in A$, on a :
$$\begin{aligned}\langle x + \lambda y, a\rangle &= \langle x, a\rangle + \lambda\langle y, a\rangle \\ &= 0 + \lambda \times 0 \qquad (\text{car } (x \perp a \text{ et } y \perp a) \\ &= 0\end{aligned}$$
Ainsi, $x + \lambda y \in A^\perp$. On conclut donc que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ⋆ Si $x \in \mathrm{Vect}(A)^\perp$, alors x est orthogonal à tout élément de $\mathrm{Vect}(A)$ et donc en particulier à tout élément de A (puisque $A \subset \mathrm{Vect}(A)$). Ainsi, $x \in A^\perp$ et donc $\mathrm{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$.
Soit maintenant $x \in A^\perp$. Considérons $y \in \mathrm{Vect}(A)$. Par définition de $\mathrm{Vect}(A)$, il existe une suite presque nulle $(a_i)_{i\in I}$ de vecteurs de A et une suite presque nulle de nombres réels $(\lambda_i)_{i\in I}$ telles que $y = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a donc :
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \underbrace{\langle x, a_i\rangle}_{=0} = 0$$
donc $x \in \mathrm{Vect}(A)^\perp$. On a donc l'inclusion réciproque $A^\perp \subset \mathrm{Vect}(A)^\perp$. On a donc bien l'égalité $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.
- ⋆ Soit $x \in A$. Montrons que $x \in (A^\perp)^\perp$. Soit $y \in A^\perp$. Par définition de $A^\perp$, on a $x \perp y$ et donc $x \in (A^\perp)^\perp$.
- ⋆ On a 0_E (car F et $F^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels de E).
Soit maintenant $x \in F \cap F^\perp$, alors $x \perp x$ ce qui implique que $x = 0_E$ (puisque le produit scalaire est défini). On a donc l'inclusion réciproque $F \cap F^\perp \subset \{0_E\}$. ■

3) Algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

L'algorithme suivant permet de transformer une base d'un espace euclidien en une base orthogonale de l'espace.

Théorème 2 (d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) Soient E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une base *orthogonale* $\mathscr{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ de E telle que :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$$

Démonstration On utilise un raisonnement par récurrence. Posons $u_1 = e_1$ et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,
$$u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1}, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$
Montrons par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ que :

(*i*) $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$;

(*ii*) $u_k \in \{u_1, \dots, u_{k-1}\}^\perp$ si $k \geqslant 2$.

Il n'y a rien à vérifier si $k = 1$. Supposons maintenant que la proposition est vraie au rang $k \in [\![1, n-1]\!]$. Par définition du vecteur u_{k+1}, la proposition (*i*) est vérifiée. Vérifions maintenant la condition d'orthogonalité (*ii*). Soit $j \in [\![1, k]\!]$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}\langle u_{k+1}, u_j\rangle = \left\langle e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1}, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle &= \langle e_{k+1}, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1}, u_k\rangle}{\|u_i\|^2} \underbrace{\langle u_i, u_j\rangle}_{=\delta_{i,j}} \\ &= \langle e_{k+1}, u_j\rangle - \frac{\langle e_{k+1}, u_j\rangle}{\|u_j\|^2}\|u_j\|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

ce qui démontre (*ii*). Remarquons enfin que la famille orthogonale $(u_1, \dots, u_n)$ est bien une base de E puisqu'elle est génératrice de E grâce à l'égalité :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E \qquad (\text{car } \mathscr{B} \text{ est une base de } E)$$

et car la famille $(u_1, \dots, u_n)$ comporte n vecteurs (ce qui coïncide avec la dimension de E). ■

✎✎✎ **Exercice 3** Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ en considérant la base :

$$\mathscr{B} = \big((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\big)$$

Corollaire 1 Dans un espace euclidien, il existe une base orthonormée.

Démonstration Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors E admet une base d'après le théorème de la base incomplète. L'algorithme de Gram-Schmidt permet d'obtenir, à partir de cette base, une base orthogonale $(u_1, \dots, u_n)$. Les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont nécessairement non nuls (puisque la famille est une base) donc la famille :

$$\left(\frac{1}{\|u_1\|}u_1, \dots, \frac{1}{\|u_n\|}u_n\right)$$

est une base orthonormée de E. ■

Lorsqu'on dispose d'une base orthonormée, le produit scalaire et la norme se comportent comme si l'on travaillait dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Proposition 10 (calculs dans une base orthonormée) Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Pour tous vecteurs $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ de E, on a les égalités suivantes :

- ⋆ $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = \langle x, e_k\rangle$;
- ⋆ $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$;
- ⋆ $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$.

Démonstration ⋆ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\langle x, e_k\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \underbrace{\langle e_\ell, e_k\rangle}_{=\delta_{\ell,k}} = x_k$$

- ⋆ En utilisant à nouveau la bilinéarité du produit scalaire, on obtient :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k y_\ell \underbrace{\langle e_k, e_\ell\rangle}_{=\delta_{k,\ell}} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

- ⋆ Il suffit de choisir $y = x$ dans le point précédent. ■

IV – Projecteur orthogonal

Dans toute cette section, on considère un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et de distance euclidienne notée d (on rappelle que pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $d(x, y) = \|x - y\|$).

1) Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Si F est un sous-ensemble de E, on rappelle que l'orthogonal $F^\perp$ de F est défini par :

$$F^\perp = \left\{x \in E \,\middle|\, \forall f \in F,\ x \perp f\right\}$$

Notation : si F et G sont deux sous-ensembles de E, on écrira $F \perp G$ pour dire que :

$$\forall (f, g) \in F \times G, \qquad f \perp g$$

Par exemple, si F est un sous-espace vectoriel de E, on sait que $F \perp F^\perp$.

Proposition/définition 2 Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a les propriétés suivantes :

- ⋆ $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$;
  On dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans E.
- ⋆ $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$;
- ⋆ $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration ⋆ Par définition de $F^\perp$, on a $F \perp F^\perp$ et l'égalité $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Montrons maintenant l'égalité $F + F^\perp = E$.

— L'inclusion $F + F^\perp \subset E$ est évidente (par structure d'espace vectoriel de E).

— Pour montrer l'inclusion réciproque $E \subset F + F^\perp$, considérons une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ de F. Soit $x \in E$. On peut écrire que :

$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle f_k}_{\in F} + \underbrace{\left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle f_k\right)}_{\text{noté } g}$$

et, par un calcul élémentaire, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \langle g, f_k\rangle = 0$$

donc $g \in F^\perp$. On a donc $x \in F + F^\perp$, ce qui démontre la seconde inclusion.

Finalement, on a bien $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$.

⋆ C'est une conséquence directe du premier point.

⋆ On a déjà démontré l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$. Par ailleurs, on a l'égalité $\dim(F) = \dim\big((F^\perp)^\perp\big)$ donc (puisque nous sommes en dimension finie), $F = (F^\perp)^\perp$. ■

Exemple 8 Le supplémentaire orthogonal, dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, de la droite $D = \mathrm{Vect}\big((1, 1, -1)\big)$ est le plan vectoriel $P = D^\perp$ d'équation cartésienne $x + y - z = 0$.

Corollaire 2 (théorème de la base orthonormée incomplète) Soit $p \in [\![1, n]\!]$ (où $n = \dim(E)$) et $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormée de vecteurs de E. On peut compléter la famille $\mathscr{F}$ en une base orthonormée de E.

Démonstration Posons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Comme $(F^\perp, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien, on peut en considérer une base orthonormée notée $\mathscr{G}$. On sait que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ donc la famille $\mathscr{B}$, obtenue en juxtaposant les bases $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ est une base orthonormale de E. ■

2) Projecteur orthogonal

Définition 9 (projecteur orthogonal) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle *projecteur orthogonal* sur F le projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ sur F parallèlement à $F^\perp$.

Le résultat suivant permet de calculer un projeté orthogonal, dès lors que l'on dispose d'une base orthonormée de l'espace vectoriel F sur lequel on projette.

Théorème 3 (expression orthogonal d'un projecteur orthogonal) Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, \ldots, u_p)$ une base orthonormée de F. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ le projecteur orthogonal sur F. Alors :

$$\forall x \in E, \qquad p(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k \rangle u_k$$

Démonstration Soit $x \in E$. Alors :

$$x = \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k \rangle u_k + \left(x - \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k \rangle u_k \right)$$

est la décomposition de x comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$. Par unicité de la décomposition, on a l'égalité annoncée. ■

✎✎✎ **Exercice 4** Considérons le plan vectoriel P d'écriture cartésienne $x - y + z = 0$. Déterminer l'expression analytique du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur P (on munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique).

Remarques :

- ⋆ Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base *orthogonale* de F, alors :

$$\forall x \in E, \qquad p(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\langle x, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k$$

- ⋆ Si p est le projecteur orthogonal sur F, alors $\mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur orthogonal sur $F^\perp$.
- ⋆ **Cas particulier :** supposons que D soit la droite vectorielle engendrée par un vecteur u (non nul) de E (c'est-à-dire $D = \mathrm{Vect}(u)$). Le projeté orthogonal sur D a pour expression analytique :

$$\forall x \in E, \qquad p(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

  Si q désigne le projecteur orthogonal sur l'hyperplan $H = D^\perp$, alors :

$$\forall x \in E, \qquad q(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

3) Distance à un sous-espace vectoriel de E

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. L'ensemble $\{d(x,y) \mid y \in F\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (il contient $d(x,0) = \|x\|$) et est minoré par 0 (puisque d prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$). Cet ensemble admet donc une borne inférieure (qui appartient à $\mathbb{R}_+$).

Définition 10 (distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E) Soient F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. On appelle distance de x à F, notée $d(x,F)$ la borne inférieure suivante :

$$d(x,F) = \inf\{d(x,y) \mid y \in F\} = \inf\{\|x-y\| \mid x,y \in E\}$$

Remarques :

- ⋆ On écrit :
$$\forall x \in E, \qquad d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x-y\|$$
- ⋆ Si $x \in F$, alors $d(x,F) = 0$. En effet, on a $d(x,x) = 0$ donc, par définition de $d(x,F)$, on a l'inégalité $d(x,F) \leqslant d(x,x)$. Comme par ailleurs $d(x,F) \geqslant 0$, on obtient bien $d(x,F) = 0$.

Théorème 4 (de la projection orthogonale) Soient F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. En notant p le projecteur orthogonal sur F, on a :

$$\forall y \in F, \qquad d(x,y) \geqslant d(x,p(x))$$

avec égalité si et seulement si $y = p(x)$. En particulier :

$$d(x,F) = d(x,p(x)) = \|x - p(x)\|$$

Remarque : cela signifie que le vecteur $p(x) \in F$ est l'unique vecteur de F minimisant la distance de x à F.

Démonstration Soit $y \in F$. Alors :

$$d(x,y)^2 = \|x-y\|^2 = \|(x-p(x)) + (p(x)-y)\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-y\|^2$$

d'après le théorème de Pythagore appliqué aux vecteurs orthogonaux $y - p(x)$ et $p(x) - x$ (par définition de p, on a $x - p(x) \in F^\perp$ et $p(x) - y \in F$). Autrement dit :

$$d(x,y)^2 = d(y,p(x))^2 + d(x,p(x))^2 \geqslant d(x,p(x))^2$$

On a de plus égalité si et seulement si $d(y,p(x)) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $y = p(x)$. ■

4) Cas particulier : distance à un hyperplan

On rappelle qu'un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ (où $n = \dim(E)$). Le supplémentaire $H^\perp$ de H dans E est donc une droite vectorielle.

Définition 11 (vecteur normal à un hyperplan) Soit H un hyperplan de E. On appelle *vecteur normal à H* tout vecteur directeur de la droite $H^\perp$.

Exemple 9 Si P est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont une équation cartésienne est $x - 2y + z = 0$. Alors :

$$\mathbb{R}^3 = P \overset{\perp}{\oplus} D \qquad \text{où} \qquad D = \mathrm{Vect}\big((1,-2,1)\big)$$

Un vecteur normal à l'hyperplan P de $\mathbb{R}^3$ est donc $\vec{n} = (1,-2,1)$.

Proposition 11 Soient H un hyperplan de E et $e \in E$ un vecteur normal à H. Alors :

$$\forall x \in E, \qquad d(x, H) = \frac{|\langle x, e\rangle|}{\|e\|}$$

Démonstration Il suffit d'écrire l'expression analytique du projecteur orthogonal sur $H^\perp$ et d'utiliser le théorème de la projection orthogonale. ■

Remarque. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ et $D = \mathrm{Vect}(u)$. Alors :

$$\forall x \in E, \qquad d(x, D) = \left\| x - \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2} u \right\|$$

C'est une conséquence de la proposition précédente et du fait que $p_H + p_{H^\perp} = \mathrm{Id}_E$.