Éléments de logique et de raisonnement

I – Quelques notions de logique élémentaire

1) Assertions mathématique

Définition 1 Une *assertion* est un énoncé mathématique qui est soit vrai soit faux (pas les deux à la fois).

On associe à une assertion une valeur de vérité : V (vraie) ou F (fausse).

Exemple 1
1. P : « $2+1=4$ » (F)
2. Q : « $\pi \in \mathbb{N}$ » (F)
3. R : « la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ » (V)

Faire des mathématiques, c'est énoncer et démontrer des assertions vraies, que l'on appelle alors des *propositions*.

Définition 2 (vocabulaire)
- ⋆ Un *théorème* est une proposition importante.
- ⋆ Un *corollaire* est une conséquence (plus ou moins) directe d'un théorème.
- ⋆ Un *lemme* est une proposition intermédiaire permettant de démontrer un théorème.
- ⋆ Un *axiome* est une assertion que l'on décide vraie.

2) Opérations sur les propositions

Il existe cinq connecteurs logiques qui permettent de construire de nouvelles assertions à partir d'assertions existantes : la *négation*, *ou*, *et*, l'*implication* ($\Longrightarrow$) et l'*équivalence* ($\Longleftrightarrow$).

⋆ Opérateur NON

Définition 3 Soit P une assertion. L'assertion contraire (ou la négation) de P est la proposition **non P** telle que :
- non P est fausse quand P est vraie
- non P est vraie quand P est fausse

On résume les valeurs de l'assertion non P (vraie ou fausse) dans une table de vérité.

P	**non P**
V	F
F	V

$\star$ Opérateur ET

Définition 4 (conjonction de deux assertions) Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion (P **et** Q) par :

- (P et Q) est vraie si P et Q sont vraies toutes les deux ;
- (P et Q) est fausse sinon.

P	**Q**	**P et Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 2 $\star$ (« $3 > 0$ ») **et** (« π est un entier ») est fausse ;

$\star$ $(1 + 1 = 2)$ et (la fonction inverse est décroissante sur $[1, 2]$) est vraie.

$\star$ Opérateur OU

Définition 5 (disjonction de deux propositions) Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion (P **ou** Q) par :

- (P ou Q) est vraie si au moins l'une des deux assertions P ou Q est vraie ;
- (P ou Q) est fausse sinon.

P	**Q**	**P ou Q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque. Le « ou » mathématique n'est pas exclusif. Si les deux propositions P et Q sont vraies, alors la proposition (P ou Q) est vraie. Ceci est à comparer avec le « ou » dans l'expression *fromage ou dessert.*

Exemple 3 1. (« la fonction ln est croissante ») **ou** (« $1 < 0$ ») est vraie.

2. (« $2 + 1 = 4$ ») **ou** (« π est un entier ») est fausse.

$\star$ L'opérateur IMPLICATION ($\Longrightarrow$)

Définition 6 Soient P et Q deux assertions. L'assertion (P $\Longrightarrow$ Q) (à lire « P implique Q ») est définie comme étant l'assertion (non P) ou Q.

- (P $\Longrightarrow$ Q) est fausse si Q est fausse et P est vraie ;
- (P $\Longrightarrow$ Q) est vraie sinon.

P	**Q**	**P $\Longrightarrow$ Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque : on notera que si P est fausse, alors (P $\Longrightarrow$ Q) est toujours vraie.

Exemple 4

1. $(1 = 2) \Longrightarrow (3 = 4)$ est vraie.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
   — $(x > 3) \Longrightarrow (x^2 > 9)$ est vraie ;
   — $(x^2 > 9) \Longrightarrow (x > 3)$ est fausse.
3. $(2 < 0) \Longrightarrow$ (J'ai mangé une pomme hier à 21h.) est vraie.

Remarque. Lorsque (P $\Longrightarrow$ Q) est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire** à P (car on ne peut avoir P que si on a Q) et que Q est une **condition suffisante** à P (puisqu'il suffit d'avoir P pour avoir Q).

Exemple 5

1. « Pour faire une tarte tatin, $\underbrace{\text{il faut des pommes}}_{\text{condition nécessaire}}$. » (vrai)
2. « Il suffit d'avoir des pommes pour faire une tarte tatin. » (faux)
3. « Pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, $\underbrace{\text{il suffit qu'il ait un angle droit}}_{\text{condition suffisante}}$. » (vrai)

⋆ Opérateur ÉQUIVALENCE ($\Longleftrightarrow$)

La notion d'équivalence pour les assertions correspond à la notion d'égalité pour les nombres.

Définition 7 Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion (P $\Longleftrightarrow$ Q) par

- (P $\Longleftrightarrow$ Q) est vraie si les deux assertions ont la même valeur (toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses) ;
- (P $\Longleftrightarrow$ Q) est fausse sinon.

Lorsque (P $\Longleftrightarrow$ Q) est vraie, on dit que les assertions P et Q sont *équivalentes.*

P	**Q**	**P $\Longleftrightarrow$ Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 6

1. $(1 = 2) \Longleftrightarrow (3 < 0)$
2. P : « $x = 1$ » et Q : « $x^2 = 1$ » ne sont pas équivalentes.

3. P : « $e^x = e^y$ » et Q : « $x = y$ » sont équivalentes.
4. P : « le triangle ABC est rectangle en A » et Q : « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » sont équivalentes.
5. P : « $x > 0$ » et Q : « $x^2 > 0$ » ne sont pas équivalentes.
6. $(1 = 0) \iff$ (2 est impair)

✎✎✎ **Exercice 1** Soient P et Q deux assertions. Monter que :

$$(\mathrm{P} \implies \mathrm{Q}) \iff ((\text{non } \mathrm{P}) \text{ ou } \mathrm{Q})$$

3) Propriétés des opérateurs NON, ET, OU, $\implies$ et $\iff$

Toutes les propriétés qui suivent sont intuitives. On les démontre facilement en utilisant les tables de vérité.

Proposition 1 Soients P, Q et R trois propositions.

- **idempotence :** (P et P) $\iff$ P, (P ou P) $\iff$ P
- **double négation :** non (non P) $\iff$ P
- **commutativité du et :** (P et Q) $\iff$ (Q et P)
- **commutativité du ou :** (P ou Q) $\iff$ (Q ou P)
- **associativité du et :** P et (Q et R) $\iff$ (P et Q) et R (on n'a donc pas besoin de parenthèses lorsqu'on a plusieurs *et* consécutifs)
- **associativité du ou :** P ou (Q ou R) $\iff$ (P ou Q) ou R (on n'a donc pas besoin de parenthèses lorsqu'on a plusieurs *ou* consécutifs)
- **distributivité du et sur le ou :** (P ou Q) et R $\iff$ (P et R) ou (Q et R) (en analogie avec la distributivité de + par rapport à × pour les nombres)
- **distributivité du ou sur le et :** (P et Q) ou R $\iff$ (P ou R) et (Q ou R)
- **négation d'une implication :** non(P $\implies$ Q) $\iff$ (P et non(Q))
- **tansitivité de $\implies$** (P $\implies$ Q) et (Q $\implies$ R) $\iff$ (P $\implies$ R)

Démonstration (de la distributivité du *et* sur le *ou*) On utilise des tables de vérité pour démontrer chaque propriété. On commence par la table de vérité de la proposition (P ou Q) et R.

P	**Q**	**R**	**P ou Q**	**(P ou Q) et R**
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

On écrit maintenant la table de vérité de (P et R) ou (Q et R).

P	**Q**	**R**	**P et R**	**Q et R**	**(P et R) ou (Q et R)**
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

On constate que les dernières colonnes des deux tables de vérités sont les mêmes. Ceci signifie que les deux propositions [(P ou Q) et R] et [(P et R) ou (Q et R)] sont équivalentes. ■

Proposition 2 (lois de De Morgan) Soient P et Q deux assertions. Alors :

1. non (P et Q) $\iff$ (non P) ou (non Q)
2. non (Q ou P) $\iff$ (non P) et (non Q)

Démonstration

✎✎✎ **Exercice 2** Donner l'événement contraire de chacun des événements suivants.

1. « $-1 < x \leqslant 3$ »
2. « Au moins un élève de la classe a les yeux verts » ou « j'ai faim »

Remarques. Soient P et Q deux propositions. La négation de P $\Longrightarrow$ Q est [P et (non Q)].

Proposition 3 (lien entre implication et équivalence) Soient P et Q deux propositions. Alors P est équivalente à Q si et seulement si P implique Q et Q implique P.

$$(\mathrm{P} \iff \mathrm{Q}) \iff \big[(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \text{ et } (\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P})\big]$$

Démonstration en exercice ■

II – Les quantificateurs universel ∀ et existentiel ∃

1) Définition

Définition 8

- Le quantificateur universel ∀ signifie « pour tout » ou « quel que soit ».
- Le quantificateur existentiel ∃ signifie « il existe au moins ».
- On peut aussi utiliser ∃! qui signifie « il existe un unique ».

Exemple 7

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$: pour tout x réel, x^2 est positif ou nul.
2. $\exists\, n \in \mathbb{N},\ n > 2$ et $n < 5$: il existe au moins un entier n tel que n supérieur à 2 et inférieur à 5. (par Exe 3)
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in N,\ n > x$: quel que soit le réel x, il existe un entier n plus grand que x (par exemple $n = \lfloor x \rfloor + 1$).
4. « Il existe un entier naturel n tel que $\dfrac{1}{n}$ soit inférieur ou égal à 10^{-3}. » se réécrit « $\exists\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{n} \leq 10^{-3}$ ».

✎✎✎ **Exercice 3** Traduire avec des quantificateurs les énoncés suivants.

1. La fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement positive sur $[0,1]$
2. La fonction g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[0,1]$.
3. f est l'application nulle sur $\mathbb{R}$.
4. Le polynôme P admet au moins une racine réelle.

2) Négation

Attention aux négations des phrases quantifiées.

Proposition 4 Soient E un ensemble et, pour tout $x \in E$, soit $P(x)$ une proposition portant sur l'élément x de E (on dit aussi que $P(x)$ est un *prédicat* portant sur la variable x). Alors

$$\text{non } (\forall x \in E, \text{P}(x)) \iff (\exists\, x \in E, \text{ non P}(x))$$

et

$$\text{non } (\exists\, x \in E, \text{P}(x)) \iff (\forall x \in E, \text{ non P}(x))$$

Autrement dit, pour écrire la négation d'une proposition contenant les symboles $\forall$ et/ou $\exists$:

- on remplace $\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$;
- on nie la proposition finale.

Exemple 8

1. « Quel que soit le jour de la semaine, un élève de prépa fait des mathématiques. » admet comme négation : « Il existe au moins un jour de la semaine où un élève de prépa ne fait pas des mathématiques. ».
2. La négation de « $\forall x \in E,\ f(x) > 0$ » est « $\exists\, x \in E,\ f(x) \leqslant 0$ ».

✎✎✎ **Exercice 4** Donner la négation des propositions suivantes.

1. « Toutes les boules de l'urne sont vertes. »
2. « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant 3$ ».
3. « $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ » (où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$)

Remarque : le troisième point est la définition de « f est continue au point x_0 ».

3) Ordre des quantificateurs

- On peut permuter deux symboles de même type qui se suivent (deux symboles $\forall$ ou deux symboles $\exists$) : si E et F sont deux ensembles et si P est un prédicat portant sur deux variables $x \in E$ et $y \in F$, alors :
$$(\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x, y)) \iff (\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x, y))$$
et :
$$(\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)) \iff (\exists\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ P(x, y))$$
- **Mais** on ne peut pas permuter $\exists$ et $\forall$.
$$(\forall x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)) \not\Longleftrightarrow (\exists\, y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x, y))$$

Exemple 9 L'assertion
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \exists\, q \in \mathbb{N},\ q > p$$
est vraie (si $p \in \mathbb{N}$ est fixé, $q = p + 1 \in \mathbb{N}$ convient) tandis que l'assertion
$$\exists\, q \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ q > p$$
est fausse (par exemple pour $p = q + 1$ l'inégalité $q > p$ est fausse).

III – Quelques méthodes de démonstrations

On présente ici les méthodes de démonstrations les plus fréquemment utilisés.

1) Le raisonnement « direct » (dit *par déduction*)

C'est le type de raisonnement le plus courant. On déduit de la proposition P une succession de propositions jusqu'à obtenir la proposition Q.

Exemple 10 1. $\underbrace{AB = 3,\ AC = 4 \text{ et } BC = 5}_{\text{P}}$, alors $\underbrace{\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A}_{\text{Q}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^3} \leqslant 1$$

2) Le raisonnement par contraposition

Soient P et Q deux propositions. En utilisant une table de vérité, il est aisé de démonter la propriété suivante.

Proposition 5 (raisonnement par contraposition) On a l'équivalence :

$$(P \Longrightarrow Q) \iff (\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P)$$

Démonstration Comparer les tables de vérités de $(P \Longrightarrow Q)$ et de $(\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P)$. ■

Exemple 11 « Il neige donc il fait froid. » admet pour contraposée « Il ne fait pas froid donc il ne neige pas. » (à ne pas confondre avec la réciproque qui est fausse).

✎✎✎ **Exercice 5** Donner la forme contraposée de chacune des implications suivantes.

1. $x \geqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant \beta$
2. $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

Pour démontrer que (P $\Longrightarrow$ Q), il est parfois plus commode de démontrer que (non Q $\Longrightarrow$ non P). Par exemple, supposons que l'on veuille démontrer l'implication

$$x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0$$

Comme on est plus à l'aise avec le signe « $=$ », on va démontrer sa forme contraposée qui est :

$$xy = 0 \Longrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$$

Or on sait bien que cette implication est vraie : si un produit de nombres est nul, c'est que l'un de ces deux nombres est nul (équation « produit-nul »).

✎✎✎ **Exercice 6** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'implication (n^2 pair) $\Longrightarrow$ (n pair).

Solution. La forme contraposée est (n impair) $\Longrightarrow$ (n^2 impair). Supposons que n soit un entier naturel impair. Il existe alors un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. On a donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Donc n^2 est un entier naturel impair.

3) Le raisonnement par disjonction de cas

Lorsqu'on veut montrer que P $\Longrightarrow$ Q, on est parfois amené à traiter plusieurs cas.

Exemple 12 Soit n un entier naturel. Montrons que $n(n+1)$ est un entier pair.

Solution. On procède par disjonction des cas en raisonnant sur la parité de l'entier n.
Premier cas : n est pair.
Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(k^2+k)$ est pair.

Deuxième cas : n est impair.
Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Alors $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(k+1)(2k+1)$ est pair.

Dans les deux cas, l'entier $n(n+1)$ est pair, ce qui démontre le résultat.

✎✎✎ **Exercice 7** Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

Solution. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On distingue les cas où $x \leq y$ et $x > y$.

- **Premier cas :** $x \leq y$. Alors $\max(x,y) = y$ et $x+y+|x-y| = x+y+(y-x) = 2y$ donc $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.
- **Deuxième cas :** $x > y$. Alors $\max(x,y) = x$ et $x+y+|x-y| = x+y+(y-x) = 2x$ donc $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

Finalement, dans les deux cas on a $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

4) Le raisonnement par l'absurde

On veut démontrer une proposition P. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que P est fausse et d'en déduire une absurdité.

Exemple 13 Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

✎✎✎ **Exercice 8** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

5) Démonstration à l'aide d'un contre-exemple

Cette méthode est utilisée pour montrer qu'une assertion est fausse en trouvant un exemple qui la contredit.

Exemple 14 La proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$ » est fausse. En effet, $x = 0$ en est un contre-exemple.

Attention : on peut montrer qu'une proposition est fausse avec un contre-exemple. En revanche, un exemple ne suffit pas à prouver qu'une proposition est vraie !

6) Le raisonnement par analyse-synthèse

Ce raisonnement permet de démontrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant des propriétés données. Il se décompose en deux parties.

— **Phase d'analyse :** on suppose que l'objet existe et on essaie de trouver des propriétés que doit posséder cet objet. On obtient alors que : « si l'objet existe, alors il s'agit nécessairement de celui ci : ... » (c'est la *condition nécessaire d'existence*). Cela prouve l'unicité.
— **Phase de synthèse :** on considère l'objet obtenue à l'issue de la phase d'analyse et on montre que celui-ci est solution du problème, ce qui démontre l'existence.

Exemple 15 Résoudre l'équation $x = \sqrt{-3x-2}$.

Exemple 16 Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et d'une fonction impaire $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Solution. On raisonne par analyse-synthèse.

— **Analyse :** supposons qu'il existe des fonctions p et i paire et impaire respectivement sur $\mathbb{R}$ telles que $f = p+i$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$
ce qui donne, combiné à l'identité $f(x) = p(x) + i(x)$:
$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{1}$$
Ainsi, si p et i existent, on a déterminé leurs expressions (on a donc l'unicité).

— **Synthèse :** réciproquement, les expressions de p et i obtenues en (1) définissent des fonctions paire et impaire respectivement et on a bien l'égalité $f = p + i$.

7) Le raisonnement par récurrence

(a) L'ensemble des entiers naturels

La construction axiomatique de l'ensemble $\mathbb{N}$ est hors-programme. On le considèrera tel qu'il a été introduit au lycée : l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10, 11, \ldots\}$$
Cet ensemble est *infini* et on le munit naturellement d'une addition et d'une multiplication. Ces opérations sont des *lois de compositions internes* dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire :

⋆ $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m+n \in \mathbb{N}$;

⋆ $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ mn \in \mathbb{N}$.

Cet ensemble est muni d'un *élément neutre pour l'addition*, à savoir 0 (on a $0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 + n = n + 0 = n$). En outre, on peut munir $\mathbb{N}$ de deux relations d'ordre, à savoir :

— l'*ordre naturel donné par la relation* $\leqslant$;

— la *divisibilité* : si $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on notera $a \mid b$ (« a divise b ») s'il existe un entier naturel c tel que $b = ac$. Par exemple, $2 \mid 4$ mais $3 \nmid 5$.

Notations.

⋆ Si m et n sont des entiers naturels tels que $m \leqslant n$, alors on notera $[\![m,n]\!]$ l'intervalle *d'entiers* $\{m, m+1, \ldots, n\}$.

⋆ On notera $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, c'est-à-dire $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Le résultat suivant, que l'on peut déduire de la construction de $\mathbb{N}$, sera admis dans la suite :

Axiome 1 Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément (ou minimum).

Remarques :

⋆ Si $A \subset \mathbb{N}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, dire que $a^\star$ est *le plus petit élément de* A signifie deux choses :
— $a^\star \in A$;
— $\forall a \in A,\ a^\star \leqslant a$.
On note : $a^\star = \min(A)$.

⋆ Par ailleurs, on dit que A est *majorée* si :
$$\exists\, M \in \mathbb{N},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M$$

Par exemple, $\mathbb{N}^*$ admet pour plus petit élément l'entier 1. Le résultat intuitif suivant se déduit de l'axiome ci-dessus (il nous sera notamment utile pour démontrer le résultat relatif à la division euclidienne).

Proposition 6 Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément (ou maximum).

Démonstration Soit $A \subset \mathbb{N}$ une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée. Notons :

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \forall a \in A,\ a \leqslant n \right\}$$

l'ensemble des majorants de A. Alors :
- $B \neq \varnothing$ car A est majorée ;
- $B \subset \mathbb{N}$.

D'après l'axiome, l'ensemble B admet un plus petit élément ; autrement dit, il existe $b \in B$ (donc b est un majorant de A) tel que :

$$\forall x \in B,\ b \leqslant x$$

On distingue ensuite deux cas.

⋆ **Premier cas :** $b = 0$
Alors $A = \{0\}$ (puisque A est non vide et majorée par 0). Donc 0 est le plus grand élément de A.

⋆ **Deuxième cas :** $b \neq 0$
Alors $b - 1 \in \mathbb{N}$ et $b - 1 \notin B$ par définition de b donc $b - 1$ ne majore pas A. Il existe donc $a \in A$ tel que $a > b - 1$, ce qui signifie que $b - 1 < a \leqslant b$. Nécessairement, $b = a \in A$. Finalement, b est la plus grand élément de A. ■

Voyons une application importante du résultat précédent.

Théorème 1 (de la division euclidienne) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple d'entiers relatifs (q, r) tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant r < b \tag{2}$$

On dit qu'on a effectué la division euclidienne de a par b. Dans cette division, le quotient est q, le reste est r.

Démonstration Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On raisonne par analyse synthèse.

⋆ **Analyse :** supposons qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. Alors $0 \leqslant a - bq < b$, c'est-à-dire $\frac{a}{b} - 1 < q \leqslant \frac{a}{b}$. On a donc $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$. Le couple (q, r) est donc uniquement déterminé.

⋆ **Synthèse :** posons $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ et $r = a - bq$. On a alors bien $a = bq + r$ et $\frac{a}{b} - 1 < q \leqslant \frac{a}{b}$ donc $0 \leqslant r < b$. ■

(b) Récurrences

Dans toute cette section, on considère, pour tout entier naturel n (où pour tout entier n supérieur ou égal à un entier naturel n_0) un prédicat $\mathscr{P}(n)$.

Récurrence « simple »

Proposition 7 (principe de récurrence) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

⋆ $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ;

⋆ pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ (*hérédité*).

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration Supposons que les deux points sont vérifiés et posons :

$$E = \{n \geqslant n_0 \mid \mathscr{P}(n) \text{ n'est pas vraie}\}$$

Il s'agit de montrer que $E = \varnothing$. Par l'absurde, supposons que E soit non vide. D'après l'axiome, E admet un plus petit élément noté m. Comme $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie, on a $m \geqslant n_0 + 1$. Par définition de m, on sait que $m - 1 \notin E$. Donc $\mathscr{P}(m-1)$ est vraie, et comme $m - 1 \geqslant n_0$, on sait (par hérédité) que $\mathscr{P}(m)$ est vraie. Ceci contredit la définition de m. Finalement, $E = \varnothing$. ■

Exemple 17 Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2^n > n$$

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la proposition « $2^n > n$ ».

- ⋆ **Initialisation :** montrons que la proposition $\mathscr{P}_1$ est vraie. On a $2^1 = 2$ et comme $2 > 1$, la proposition $\mathscr{P}_1$ est bien vraie.
- ⋆ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la proposition $\mathscr{P}_n$. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, on a $2^n > n$ donc $2 \times 2^n > 2n$ soit $2^{n+1} > n + n$. Comme $n \geqslant 1$, on a alors $2^{n+1} > n+1$ et donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- ⋆ **Conclusion :** par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2^n > n$$

✎✎✎ **Exercice 9** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Démontrer que 10 divise $2^{(2^n)} - 6$.

✎✎✎ **Exercice 10** Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n) \geqslant n$$

Récurrence « double »

Proposition 8 (récurrence double) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- ⋆ les propositions $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0 + 1)$ sont vraies (*initialisation*) ;
- ⋆ pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathscr{P}(n) \\ \mathscr{P}(n+1) \end{array} \right. \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2) \qquad (\textit{hérédité}).$$

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on considère la proposition $\mathscr{Q}(n)$ définie par :

$$\mathscr{Q}(n) \iff (\mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1))$$

Par hypothèse sur la suite $(\mathscr{P}(n))_{n \geqslant n_0}$:

- ⋆ $\mathscr{Q}(n_0)$ est vraie ;
- ⋆ pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$\mathscr{Q}(n) \Longrightarrow \mathscr{Q}(n+1)$$

Par principe de récurrence simple, pour tout entier $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathscr{Q}(n)$ est vraie et donc, pour tout $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

✎✎✎ **Exercice 11** On considère la suite *de Fibonacci* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

En notant φ et $\overline{\varphi}$ les racines du trinôme $X^2 - X - 1$, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n = \frac{\varphi^n - (\overline{\varphi})^n}{\varphi - \overline{\varphi}}$$

Récurrence « forte »

Proposition 9 (récurrence forte) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- $\star$ $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ;
- $\star$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$(\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ \mathscr{P}(n)) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1) \qquad (\textit{hérédité})$$

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration On procède comme dans la démonstration précédente, en considérant, pour tout $n \geqslant n_0$, le prédicat $\mathscr{Q}(n)$ définie par :

$$\mathscr{Q}(n) \iff (\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ \mathscr{P}(n)$$

✎✎✎ **Exercice 12** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \cdots + u_0$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2^n$.