

# Probabilités

## I – Vocabulaire de la théorie des probabilités

On appelle *expérience aléatoire* tout processus dont le résultat est déterminé par le hasard. On ne connaît pas à l'avance le résultat (ou l'issue) de celle-ci et il peut varier si on répète l'expérience (comme le lancer d'une pièce de monnaie par exemple).

### 1) Univers d'une expérience aléatoire

**Définition 1 (univers)** On appelle *univers* d'une expérience aléatoire l'ensemble, généralement noté  $\Omega$ , de toutes les issues possibles.

**Remarque :** en MPSI, on se concentre sur les expériences aléatoires dont les univers  $\Omega$  sont des ensembles finis.

**Exemple 1**      ★ On jette à dé à 6 faces. L'univers est  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ .

★ On lance deux dés à 6 faces. On peut ici considérer que  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ .

★ On lance une pièce de monnaie. Alors  $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ .

★ On prélève deux cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Ici,  $\Omega$  est l'ensemble des 2-combinaisons de l'ensemble des 32 cartes. En particulier,  $\text{card}(\Omega) = \binom{32}{2}$ .

### 2) Événements

On considère ici un univers  $\Omega$  associé à une expérience aléatoire.

**Définition 2 (événement)** On appelle événement associé à l'expérience aléatoire toute partie de  $\Omega$ .

L'ensemble des événements est donc  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

**Exemple 2**      Pour le lancer de deux dés, l'événement  $A$  : « obtenir au moins un as » est :

$$A = (\{1\} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket) \cup (\llbracket 1, 6 \rrbracket \times \{1\}) = \Omega \setminus (\llbracket 2, 6 \rrbracket^2)$$

Certaines opérations ensemblistes, comme le complémentaire par exemple, ont des dénominations propres en probabilités. Le tableau ci-dessous résume les différences entre dénominations ensembliste et probabiliste.

	Description ensembliste	Description probabiliste
$\Omega$		univers/événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
$\{a\}$	singleton	événement élémentaire
$A \in \mathcal{P}(\Omega)$	sous-ensemble	événement
$\bar{A}$	complémentaire de $A$	événement contraire de $A$
$A \cup B$	réunion de $A$ et $B$	$A$ ou $B$
$A \cap B$	intersection de $A$ et $B$	$A$ et $B$
$A \cap B = \emptyset$	$A$ et $B$ sont des parties disjointes	$A$ et $B$ sont des événements incompatibles
$A \subset B$	$A$ est inclus dans $B$	$A$ implique $B$
$a \in A$	$a$ appartient à $A$	$a$ réalise $A$

**Exemple 3** Pour le lancer de dé, les événements  $A$  : « obtenir un as » et  $B$  : « obtenir un nombre pair » sont incompatibles.

**Définition 3 (système complet d'événements)** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ . On dit que  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est un *système complet d'événements* si

- les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont deux à deux disjoints :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

**Exemple 4** 1. Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  un espace probablisable où l'univers  $\Omega$  est *fini*. On note  $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

Alors :

- $\{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\}$  est un système complet d'événements ;
  - si  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  est un événement, alors l'ensemble  $\{A, \bar{A}\}$  est un système complet d'événements.
2. Pour l'exemple du lancé de dé,  $(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$  est un système complet d'événements,  $(\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\})$  en est un autre. En revanche,  $(\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 5, 6\})$  n'en est pas un car l'intersection n'est pas vide.

## II – Probabilités sur un univers fini

On considère une expérience aléatoire d'univers associé  $\Omega$ . Afin de mesurer le *poids* des événements, on définit une fonction sur l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  qui à tout événement associe un nombre réel compris entre 0 et 1.

## 1) Définition

**Définition 4 (probabilité)** On appelle *probabilité sur*  $\Omega$  toute application  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

- ★  $P(\Omega) = 1$  ;
- ★ pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ , on a :

$$A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Le couple  $(\Omega, \mathbb{P})$  est alors appelé *espace probabilisé* (fini).

**Exemple 5** Dans le cas d'un lancer de dé équilibré à 6 faces, on peut définir une probabilité (dite *uniforme* sur  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ ), en posant :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\llbracket 1, 6 \rrbracket), \quad \mathbb{P} = \frac{\text{card}(A)}{6}$$

**Conséquences de la définition :**

- ★ Une probabilité est à valeurs dans  $[0, 1]$  : pour tout événement  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ . En effet, si  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , les événements  $A$  et  $\bar{A}$  sont incompatibles et  $A \cup \bar{A} = \Omega$ . Donc

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \quad \text{et donc} \quad P(A) = 1 - \underbrace{P(\bar{A})}_{\geq 0} \leq 1$$

- ★ Pour tout entier  $n \geq 2$  et pour toute famille  $\{A_1, \dots, A_n\}$  d'événements deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

On démontre par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , la proposition  $\mathcal{P}(n)$  : « Pour tout  $n$ -uplet  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$  d'événements deux à deux incompatibles,  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$  » est vraie.

- **Initialisation** : si  $n = 2$ , la propriété  $\mathcal{P}(2)$  est vraie car  $P$  est une probabilité.
- **Hérédité** : soit  $n \geq 2$  tel que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie. Montrons que la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Soit  $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1}) \in \mathcal{P}(\Omega)^{n+1}$  un  $(n+1)$ -uplet d'événements deux à deux incompatibles. Alors  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  et  $A_{n+1}$  sont deux événements incompatibles. En effet, par distributivité de l'intersection par rapport à l'union, on a

$$A \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n \underbrace{(A_i \cap A_{n+1})}_{=\emptyset} = \emptyset$$

Comme  $P$  est une probabilité, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P(A \cup A_{n+1}) = P(A) + P(A_{n+1})$$

On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence : on applique la propriété  $\mathcal{P}(n)$  au  $n$ -uplet  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ , ce qui nous donne :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_{n+1})$$

Finalement, la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.


- **Conclusion** : pour tout entier  $n \geq 2$ , la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

- ★ Une probabilité est caractérisée par ses valeurs en chaque événement élémentaire. En effet, pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , on a :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

puisque les événements  $\{\omega\}$ , où  $\omega \in A$ , sont deux à deux incompatibles. On dit que  $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$  est une distribution de probabilités sur  $\Omega$ .

**Définition 5 (distribution de probabilités)** On appelle *distribution de probabilités* sur un ensemble  $I$  toute famille presque nulle  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de réels positifs telle que  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$  (somme finie).

 **Exercice 1** On lance un dé truqué vérifiant les propriétés suivantes :

- le dé tombe avec la même probabilité sur toutes les faces paires ;
- le dé tombe avec la même probabilité sur toutes les faces impaires ;
- le dé a deux fois plus de chance de tomber sur un nombre pair que sur un nombre impair.

Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire puis déterminer la probabilité que le dé tombe sur un nombre inférieur ou égal à 3.

**Une solution.**

- L'univers est  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- On commence par déterminer la probabilité de chacun des événements élémentaires. On traduit les hypothèses de l'énoncé : on sait que  $P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$  et  $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$  et  $P(\{2, 4, 6\}) = P(\{1, 3, 5\})$ , ce qui se réécrit :

$$P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = 2(P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})) \quad \text{soit encore} \quad 3P(\{2\}) = 6P(\{1\})$$

d'où  $P(\{2\}) = 2P(\{1\})$ . Il suffit donc de connaître  $P(\{1\})$  pour connaître les probabilités des événements élémentaires. Or on sait que la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1 donc  $9P(\{1\}) = 1$ , soit  $P(\{1\}) = \frac{1}{9}$ . On peut résumer les probabilités obtenues dans un tableau

$\omega_i$	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega_i\})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

- Si  $A$  désigne l'événement « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 », alors  $A = \{1, 2, 3\}$  et donc :

$$P(A) = P(\{1, 2, 3\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

## 2) Probabilité uniforme

**Proposition/définition 1** Soit  $\Omega$  un ensemble fini. Il existe une unique probabilité  $P$  sur  $\Omega$  telle que les événements élémentaires soient équiprobables, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (\omega, \omega') \in \Omega^2, \quad P(\{\omega\}) = P(\{\omega'\})$$

Cette probabilité  $P$  est appelée *probabilité uniforme sur  $\Omega$*  (on dit aussi qu'on est en situation d'équiprobabilité).

**Démonstration** On procède par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : supposons que  $P$  soit une probabilité vérifiant la condition, alors pour tout  $\omega_0 \in \Omega$  on a (le calcul est licite puisque l'univers  $\Omega$  est fini)

$$1 = P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \text{card}(\Omega)P(\{\omega_0\})$$

et donc :

$$P(\{\omega_0\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

★ **Synthèse** : on vérifie que l'application  $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

est bien une probabilité sur  $\Omega$ . ■

**Exemple 6** • Lancé d'un dé équilibré

- Lancé d'une pièce non truquée
- Tirage d'une carte dans un jeu de cartes

**Remarque** : si  $P$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$ , alors :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

**Exemple 7** On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 trèfles parmi ces 5 cartes ?

**Une solution.**

- L'univers est l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Son cardinal est le nombre de combinaisons à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments, c'est-à-dire  $\text{card}(\Omega) = \binom{32}{5}$ . Comme la distribution se fait au hasard, le couple  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  est muni de la probabilité uniforme.
- Notons  $A$  l'événement : « Sur les 5 cartes, le joueur a tiré exactement trois trèfles ». Déterminons le cardinal de  $A$ . Il y a 8 trèfles dans le jeu, on a donc  $\binom{8}{3}$  possibilités pour choisir trois cartes de trèfle puis il reste à choisir 2 cartes parmi les cartes qui ne sont pas des trèfles, ce qui fait  $\binom{24}{2}$  possibilités. Donc  $\text{card}(A) = \binom{8}{3} \times \binom{24}{2}$ .

D'où 
$$P(A) = \frac{\binom{8}{3} \times \binom{24}{2}}{\binom{32}{5}}.$$

### 3) Propriétés générales

**Proposition 1** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé. Alors

- pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . En particulier,  $P(\emptyset) = 0$ .
- Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ ,  $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$  (*croissance d'une probabilité*)
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ ,  $A \subset B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

**Démonstration** • Déjà vu

- Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ . Alors  $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ . Comme les ensembles  $A \cap \bar{B}$ ,  $A \cap B$  et  $\bar{A} \cap B$  sont disjoints, on a  $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ . Donc

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= [P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)] + [P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= P((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)) + P((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

- Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$  tel que  $A \subset B$ . Alors  $B = A \cup (B \cap \bar{A})$  et les événements  $A$  et  $B \cap \bar{A}$  sont incompatibles. Par définition de la probabilité  $P$ , on a alors

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \cap \bar{A})}_{\geq 0} \leq P(B)$$

- découle encore de l'égalité  $B = A \cup (B \cap \bar{A})$  ■

🔗🔗🔗 **Exercice 2** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  un espace probabilité et  $(A, B, C) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$ . Montrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

🔗🔗🔗 **Exercice 3** Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as lorsque l'on lance 3 dés (équilibrés) à 6 faces.

**Une solution.**

Notons  $A$  l'événement : « on obtient au moins un as en lançant 3 dés à 6 faces ». L'univers associé au lancer des trois dés est  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$ . L'événement  $\bar{A}$  est : « on n'obtient aucun as à l'issue des trois lancers ». Autrement dit,  $\bar{A} = \llbracket 2, 6 \rrbracket^3$  et donc, par équiprobabilité :

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{card}(\bar{A})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

Ainsi :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{91}{216}$$

**Remarque :** on peut aussi montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ , on a l'inégalité :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

### III – Probabilités conditionnelles

Dans tout ce paragraphe,  $(\Omega, P)$  désigne un espace probabilisé (fini).

#### 1) Définition

**Introduction :** on lance un dé équilibré. Soient  $A$  l'événement « On obtient un nombre inférieur ou égal à 5 » et  $B$  l'événement « On obtient un nombre pair ». Plaçons nous dans le cas où l'événement  $A$  est réalisé. Le résultat est donc un élément de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Ainsi,  $B$  est réalisé si et seulement si le résultat est un élément de  $\{2, 4\}$ . Il y a donc 2 cas favorables sur 5 cas possibles pour que  $B$  soit réalisé. Ainsi, la probabilité que  $B$  soit réalisé sachant que  $A$  l'est est égale à  $\frac{2}{5}$ . On note  $P_A(B) = \frac{2}{5}$  ou encore  $P(B|A) = \frac{2}{5}$ . De plus, on constate que  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  car  $P(A) = \frac{5}{6}$  et  $P(A \cap B) = \frac{3}{6}$ .

**Définition 6 (probabilité conditionnelle)** Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$  tel que  $P(B) > 0$ . On appelle probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ , notée  $P_B(A)$ , le nombre :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Remarques :**

- ★ Cette probabilité conditionnelle est aussi parfois notée  $P(A|B)$ .
- ★ Sachant que l'événement  $B$  est réalisé, on calcule la probabilité que  $A$  se réalise.

**Théorème 1** Soit  $A$  un événement tel que  $P(A) \neq 0$ . Alors l'application  $P_A : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ B & \longmapsto & P_A(B) \end{cases}$  définit une probabilité sur  $\Omega$ , appelée probabilité relative à l'événement  $A$ .

**Démonstration** Tout d'abord, l'application est bien définie : on peut diviser par le nombre réel non nul  $P(A)$  et pour tout  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ , le nombre réel  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  est positif ou nul puisque  $P$  est une probabilité. Il reste à vérifier les deux axiomes d'une probabilité.

- On a  $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$  (puisque  $A \cap \Omega = A$ ).
- Soit  $(B, C) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$  tel que  $B \cap C = \emptyset$ . On veut montrer que  $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$ . Par définition,

$$P_A(B \cup C) = \frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)}$$

par distributivité de l'intersection par rapport à l'union. Or  $B \cap A$  et  $C \cap A$  sont deux événements incompatibles (en effet,  $(B \cap A) \cap (C \cap A) = B \cap A \cap C \cap A = (B \cap C) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset$  par distributivité et commutativité de l'intersection) donc

$$P((B \cap A) \cup (C \cap A)) = P(B \cap A) + P(C \cap A)$$

Finalement,

$$P_A(B \cup C) = \frac{P(B \cap A) + P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C)$$

**Exemple 8** On considère une famille ayant deux enfants. On suppose que chacun des enfants a une chance sur deux d'être une fille.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

**Une solution.** On peut assimiler le problème à une l'expérience aléatoire qui consiste à attribuer à chaque famille un couple d'éléments de  $\{F, G\}$ , le premier élément du couple désignant le sexe de l'aîné, le deuxième celui du cadet. L'univers est donc  $\Omega = \{F, G\}^2 = \{(F, F), (F, G), (G, F), (G, G)\}$  et le couple  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  est muni de la probabilité uniforme. On note  $A$  l'événement « L'aîné est une fille »,  $B$  l'événement « Les deux enfants sont des filles » et  $C$  l'événement « Il y a au moins une fille ». Alors  $A = \{(F, F), (F, G)\}$ ,  $B = \{(F, F)\}$  et  $C = \{(F, F), (F, G), (G, F)\}$ .

1. La probabilité cherchée est  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ . On remarque que  $B \subset A$  donc  $A \cap B = B$  et  $P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$ .
2. La probabilité cherchée est  $P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$ . On remarque que  $B \subset C$  donc  $B \cap C = B$  et  $P_C(B) = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$ .

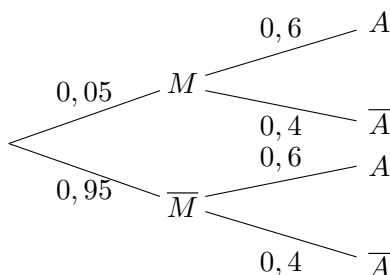
## 2) Formule des probabilités composées

Une relecture de la définition précédente consiste à dire que si  $A$  et  $B$  sont deux événements tels que  $P(A) > 0$ , alors :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) \quad (\text{formule des probabilités composées})$$

Dans une situation de probabilité conditionnelle, on représente souvent l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré.

**Exemple 9** On note  $\Omega$  l'ensemble des habitants d'une ville. Dans cette ville, la probabilité qu'un habitant soit malade (événement  $M$ ) est égale à 0,05. Quand un personne est malade, la probabilité que son médecin lui prescrive un antibiotique (événement  $A$ ) est de 0,6.



Par exemple, la probabilité qu'une personne malade se soit fait prescrire un antibiotique est égale à  $P(M \cap A) = P(M) \times P_M(A) = 0,05 \times 0,6 = 0,2$ . Pour calculer la probabilité d'une intersection, on fait donc le produit des probabilités des branches qui mènent à cet événement.

**Exercice 4** Soient  $r$  et  $v$  deux entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant  $r$  boules rouges et  $v$  boules vertes. On effectue dans cette urne deux tirages sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?

**Une solution.**

Posons  $N = r + v$  (nombre de boules initialement dans l'urne). Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , considérons l'événement  $V_i$  : « la boule tirée au  $i^{\text{e}}$  tirage est verte ». Par équiprobabilité, il est clair que :

$$P(V_1) = \frac{v}{N} \quad \text{et} \quad P_{V_1}(V_2) = \frac{v-1}{N-1}$$

donc :

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P_{V_1}(V_2) = \frac{v(v-1)}{N(N-1)}$$

La formule des probabilités composées se généralise à une intersection finie d'événements.

**Théorème 2** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé,  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $A_1, \dots, A_n$  des événements telle que  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ . Alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

**Démonstration** On démontre ce résultat par récurrence. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : « Pour tout  $n$ -uplet  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$  d'événements tel que  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ ,  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$  ».

- **Initialisation** : pour  $n = 2$ , c'est la formule des probabilités composées. Donc la proposition  $\mathcal{P}(2)$  est vraie.



- **Hérédité** : Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que la proposition  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Soit  $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$  un  $(n+1)$ -uplet d'événements tel que  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) \neq 0$ . Une probabilité étant à valeurs positives, on a  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_1 \cap \dots \cap A_n \subset A_1 \cap \dots \cap A_j$  donc  $P(A_1 \cap \dots \cap A_j) \geq P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ . En particulier,  $P(A_1 \cap \dots \cap A_j) \neq 0$ . Ceci assure l'existence de la probabilité conditionnelle  $P_{A_1 \cap \dots \cap A_j}(A_{j+1})$ . Démontrons maintenant la formule. On

commence par appliquer la formule des probabilités composées aux deux événements  $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$  et  $A_{n+1}$  :

$$P(A \cap A_{n+1}) = P_{A(A_{n+1})}P(A)$$

En appliquant maintenant l'hypothèse de récurrence au  $n$ -uplet d'événements  $(A_1, \dots, A_n)$ , on a

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

On en déduit donc que

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}) = P(A \cap A_{n+1}) = P_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1}) \times P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Finalement, la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- **Conclusion** : pour tout entier  $n \geq 2$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. ■

**Exemple 10** Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard, successivement et sans remise quatre boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches puis deux boules noires dans cet ordre ?

**Une solution.**

- On peut supposer que toutes les boules blanches sont différentes et que les boules noires sont différentes. On peut alors considérer que l'univers  $\Omega$  associé à l'expérience est l'ensemble des arrangements à 4 éléments de l'ensemble des 7 boules. On munit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  de la probabilité uniforme.
- Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on note  $B_i$  l'événement : « La  $i^{\text{e}}$  boule tirée est blanche » et pour  $j \in \{3, 4\}$ , on note  $N_j$  l'événement : « La  $j^{\text{e}}$  boule tirée est noire ». La probabilité cherchée est  $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4)$ . La probabilité de l'événement  $B_1 \cap B_2 \cap N_3$  est non nulle donc, d'après la formule des probabilités composées généralisée, on a

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3)P_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(N_4)$$

Il reste ensuite à calculer chacune des quatre probabilités qui apparaît dans la formule précédente.

- Au début, il y a 4 boules blanches sur 7 boules au total donc  $P(B_1) = \frac{4}{7}$ .
- Une fois qu'une boule blanche a été tirée, il en reste 3 sur 6 boules au total. Donc  $P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .
- Ensuite, il reste 2 boules blanches et les 3 boules noires. La probabilité de tirer une boule noire est donc  $P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{5}$ .
- Enfin, il reste 2 boules noires sur 4 au total donc  $P_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(N_4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Finalement, } P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{35}.$$

### 3) Formule des probabilités totales

On reprend l'exemple 9. On cherche quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un test de dépistage positif. Comme  $\{T, \bar{T}\}$  forme un système complet d'événements, on a

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) = P(M)P_M(T) + P(\bar{M})P_{\bar{M}}(T)$$

C'est ce qu'on appelle la formule des probabilités totales.

**Proposition 2 (formule des probabilités totales)** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $\{A_1, \dots, A_n\}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors, pour tout  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(B)$$

**Démonstration** Comme  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est un système complet d'événements, les événements  $B \cap A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont deux deux incompatibles et  $B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$ . Donc  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$  et il ne reste plus qu'à conditionner, ce qui est licite puisque les événements  $A_i$  sont de probabilités non nulles. ■

**Exemple 11** On considère 5 urnes numérotées de 1 à 5. Pour tout  $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ , l'urne  $k$  contient  $k$  boules blanches et  $5 - k$  boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?

**Solution.**

- L'univers associé à cette expérience est  $\Omega = \llbracket 1, 5 \rrbracket \times \{B, N\}$ .
- Pour tout  $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ , on note  $U_k$  l'événement « L'urne  $k$  a été choisie » et on note  $B$  l'événement « On a tiré une boule blanche ». L'ensemble  $\{U_k; k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket\}$  est un système complet d'événements donc chacune des probabilités est non nulle. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$P(B) = \sum_{k=1}^5 P_{U_k}(B)P(U_k)$$

Soit  $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ . Comme il y a équiprobabilité sur le choix de l'urne, on a  $P(U_k) = \frac{1}{5}$ . Dans l'urne  $k$ , il y a 5 boules dont  $k$  sont blanches. Donc  $P_{U_k}(B) = \frac{k}{5}$ . On a donc

$$P(B) = \frac{1}{25} \sum_{k=1}^5 k = \frac{3}{5}$$

#### 4) Formule de Bayes

La formule de Bayes permet de faire le lien entre deux probabilités conditionnelles. Elle généralise la propriété évidente suivante.

**Proposition 3** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $A, B$  deux événements tels que  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ . Alors

$$P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$$

**Démonstration** Il s'agit d'exprimer de deux manières différentes la probabilité de  $A \cap B$  en conditionnant d'une part par rapport à  $A$  et d'autre part par rapport à  $B$ . ■

On utilise souvent cette formule pour déterminer la probabilité d'une cause en fonction de son effet, pour faire un diagnostic.

**Exemple 12** On reprend l'exemple 9. Si le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?

**Solution.** D'après la proposition précédente,

$$P_T(M) = \frac{P(M)P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,1 \times 0,99}{0,126} = 0,786$$

**Proposition 4 (formule de Bayes)** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\{A_1, \dots, A_n\}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles et  $B$  un événement de probabilité non nulle. Alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

**Démonstration** Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $P(A_i) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ , on peut appliquer la proposition précédente, ce qui nous donne  $P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)}{P(B)}$ , puis on applique la formule des probabilités totale au système complet d'événements  $\{A_1, \dots, A_n\}$  et à l'événement  $B$ , ce qui nous donne le dénominateur voulu. ■

**Exemple 13** Un étudiant répond à un QCM comprenant 5 choix de réponses possibles dont une seule réponse est exacte. Soit l'étudiant connaît la réponse, soit il répond au hasard. On estime que la probabilité que l'étudiant connaisse la réponse est de 0,7. Sachant que l'étudiant a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la réponse ?

**Une solution.** Soit  $C$  l'événement « L'étudiant connaît la réponse » et  $R$  l'événement « L'étudiant a répondu correctement ». On cherche la probabilité  $P_R(C)$ . On commence par traduire les données de l'énoncé. On a  $P(C) = 0,7$ ,  $P_C(R) = 1$  et  $P_{\bar{C}}(R) = \frac{1}{5}$ . D'après la formule de Bayes, on a

$$P_R(C) = \frac{P(C)P_C(R)}{P(R)} = \frac{P(C)P_C(R)}{P(C)P_C(R) + P(\bar{C})P_{\bar{C}}(R)} = \frac{0,7 \times 1}{0,7 \times 1 + 0,3 \times 0,2} = 0,921$$

## IV – Indépendance

### 1) Définition

**Définition 7 (événements indépendants)** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $A$  et  $B$  deux événements. On dit que  $A$  et  $B$  sont *indépendants*, ce que l'on note  $A \perp\!\!\!\perp B$ , si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Remarques.** Ne pas confondre la notion d'indépendance avec la notion d'événements incompatibles (qui est de dire que  $A \cap B = \emptyset$ ).

**Exemple 14** Les résultats de tirages dans une urne avec remise, ou de lancers de dés, sont indépendants.

**Proposition 5** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(A) \neq 0$ . Alors  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P_A(B) = P(B)$ .

**Démonstration** D'après la formule des probabilités composées, on a  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ . Donc

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff P_A(B) = P(B)$$

d'où le résultat. ■

Ainsi, la probabilité que  $B$  se réalise n'a pas de lien avec la réalisation de l'événement  $A$ .

**Exemple 15** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On note  $D$  l'événement « La carte tirée est une dame »,  $C$  l'événement « La carte tirée est un cœur » et  $F$  l'événement « La carte tirée est une figure ».

1. Les événements  $D$  et  $C$  sont-ils indépendants ?
2. Les événements  $D$  et  $F$  sont-ils indépendants ?

**Solution.**

1. **Méthode 1 :** on a  $P(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ ,  $P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$  et  $P(D \cap C) = \frac{1}{32}$ . Donc  $P(D \cap C) = P(D)P(C)$ . Les événements  $D$  et  $C$  sont donc indépendants.

**Méthode 2 :** on a  $P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{1}{4} = P(C)$  donc les événements  $D$  et  $C$  sont indépendants d'après la proposition.

2. **Méthode 1** : on a  $P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$  et  $P(F \cap D) = P(D) = \frac{1}{8}$ . On a donc  $P(F \cap D) \neq P(F)P(D)$  donc les événements  $F$  et  $D$  ne sont pas indépendants.

**Méthode 2** : on a  $P_D(F) = \frac{P(D \cap F)}{P(D)} = \frac{1}{3} \neq \frac{3}{8}$  donc les événements  $F$  et  $D$  ne sont pas indépendants.

On peut généraliser la définition précédente à un nombre fini d'événements.

**Définition 8** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$  un  $n$ -uplet d'événements. On dit que ces événements sont deux à deux indépendants si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

## 2) Événements mutuellement indépendants

**Définition 9** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$  un  $n$ -uplet d'événements. On dit que ces événements sont *mutuellement indépendants* si

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Par exemple, pour trois événements  $A_1, A_2$  et  $A_3$ , l'indépendance mutuelle signifie que

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$  ;
- $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$  ;
- $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$  ;
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ .

**Remarque.** L'indépendance mutuelle entraîne que les événements sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fautive en général.

**Exemple 16** Considérons  $\Omega = \llbracket 1, 4 \rrbracket$  muni de la probabilité uniforme. On vérifie facilement que les événements  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$  et  $C = \{1, 4\}$  sont deux à deux indépendants mais que :

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C),$$

donc que les événements  $A, B$  et  $C$  ne sont pas mutuellement indépendants.

**Proposition 6** ★ Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ . On suppose que  $A$  et  $B$  sont indépendants. Alors  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.

★ Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$  une famille d'événements mutuellement indépendants. Toute famille :

$$(B_1, \dots, B_n) \in \{A_1, \bar{A}_1\} \times \dots \times \{A_n, \bar{A}_n\}$$

est constituée d'événements mutuellement indépendants.

**Démonstration** ★ Montrons que  $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B)$ . Comme  $\{A, \bar{A}\}$  est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A)P(B),$$

d'où le résultat.

★ On l'admettra : il suffit de raisonner par récurrence sur le nombre d'événements de la famille. ■

**Remarque** : de même  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.