Séries numériques

I – Généralités

Dans toute cette section, on considère une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. À partir de celle-ci, on peut considérer les sommes suivantes :

$$S_0 = u_0, \qquad S_1 = u_0 + u_1, \qquad S_2 = u_0 + u_1 + u_2, \qquad S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3, \qquad \textit{etc.}$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Notion de série

Définition 1 (série numérique) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *série de terme général* u_n. On la notera $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ (ou plus simplement $\sum u_n$).

- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que S_n est la *somme partielle d'indice* n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.
- ⋆ On dit que $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *suite des sommes partielles* de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.
- ⋆ On dit que u_n est le *terme général* de la série.

Remarques :

- ⋆ Une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ n'est pas une somme, mais une suite de sommes (partielles).
- ⋆ Il est possible de considérer des séries dont le terme général n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Il s'agira alors de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

Exemple 1 ⋆ Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 1. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

⋆ Considérons la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$

2) Nature d'une série

Définition 2 (nature d'une série) $\star$ La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est dite *convergente* si la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (de ses sommes partielles) converge. Dans le cas contraire, on dit que la série est *divergente.*

$\star$ Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, on appelle somme de la série, que l'on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la limite des sommes partielles de la série, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$\star$ Étudier la nature d'une série, c'est étudier sa convergence.

Remarque : attention à ne pas confondre les objets « $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ » et « $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ » (le premier désigne une suite, le second correspond à la limite de la suite, si celle-ci existe et est finie).

Exemple 2 $\star$ La série $\sum_{n\geqslant 0} n$ est divergente car pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} = +\infty$.

$\star$ La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et $1 - \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. La somme de la série est alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

$\star$ La série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ est divergente car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$$

donc la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

3) Cas de divergence grossière

Proposition 1 (condition nécessaire de convergence pour une série) Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration Notons $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série. Comme la série converge, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$$

d'après la relation de Chasles. Comme $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\mathrm{S}_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on a bien $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. ■

Remarques :

- ⋆ Par contraposition, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est une série divergente. On parle dans ce cas de *divergence grossière*.

  Exemple 3 Considérons la série $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$. Par continuité en 0 de la fonction cosinus (et par caractérisation séquentielle de la continuité), on a :

  $$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(0) = 1 \neq 0$$

  La série $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est donc (grossièrement) divergente.

- ⋆ La réciproque de la proposition précédente est fausse.

  Exemple 4 Considérons par exemple la série $\sum_{n\geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln(n))$. Cette série est divergente bien que :

  $$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

4) Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes

Proposition 2 Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

- ⋆ la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + \lambda v_n)$ est convergente ;
- ⋆ la somme de cette série est égale à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \qquad (\textit{propriété de linéarité de la somme})$$

Démonstration Notons respectivement $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles des séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + \lambda v_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par linéarité de la somme et par définition des sommes partielles :

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k + \lambda v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} v_k = \mathrm{S}_n + \lambda\, \mathrm{T}_n \tag{1}$$

Par hypothèse, les suites $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent de limites respectives $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. D'après (1) et les propriétés des suites convergentes, la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

ce qui signifie que la série $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. ■

Remarques :

- ⋆ Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ est divergente (regarder la suite des sommes partielles de la séries).
- ⋆ Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, alors on ne peut $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ peut converger ou diverger.

5) Restes d'une série convergente

Définition 3 (suite des restes) Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'indice n de la série de terme général u_n le nombre réel :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \mathrm{S}_n$$

où $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est la somme d'indice n de la série.

Proposition 3 (convergence de $(\mathbf{R}_n)_{n\geqslant 0}$) Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration C'est immédiat par linéarité de la limite puisque $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. ■

6) Lien suite-série

Proposition 4 (série télescopique) Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ⋆ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ;
- ⋆ la série (dite *télescopique*) $\sum_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

En cas de convergence, on a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) - u_0$$

Démonstration Pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=\sum_{k=0}^{n}u_{k+1}-\sum_{k=0}^{n}u_k=u_{n+1}-u_0$$

donc :

$$\begin{aligned}\text{la série } \sum_{n\geqslant 0}(u_{k+1}-u_k) \text{ converge} &\iff \text{la suite } \left(\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\\ &\iff \text{la suite } (u_{n+1}-u_0)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\\ &\iff \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\end{aligned}$$

et, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_0)=\left(\lim_{n\to+\infty}u_n\right)-u_0,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

✎✎✎ **Exercice 1** Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ converge et calculer sa somme.

Justification.

- ⋆ **Première méthode.** Le terme général s'écrit :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3(n+1)+1}$$

La série est donc télescopique et $\displaystyle\frac{1}{3n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc la série converge de somme $1-0=1$.

- ⋆ **Deuxième méthode.** Notons $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série. On a :

$$\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3(k+1)+1}\right)=1-\frac{1}{3n+4}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

La série est donc convergente de somme égale à 1.

7) Séries usuelles

(a) Séries télescopiques

cf. paragraphe précédent

(b) Séries géométriques

Proposition 5 (séries géométriques) Soit $q\in\mathbb{C}$. La série (dite *géométrique*) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$ et, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$$

Démonstration Soit $q\in\mathbb{C}$. On distingue deux cas.

- ⋆ **Premier cas :** $|q|\geqslant 1$

Dans ce cas, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}q^n$ diverge (grossièrement).

- ⋆ **Deuxième cas :** $|q| < 1$
  En particulier, $q \neq 1$ donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
  Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$, la série géométrique converge et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$
  d'où le résultat. ■

(c) Séries exponentielles

Rappel (inégalité de Taylor-Lagrange) : soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b], \mathbb{C})$. Alors :
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n\,!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)\,!} \max_{t \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Proposition 6 (séries exponentielles) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série (dite *exponentielle*) $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n\,!}$ est convergente de somme $\mathrm{e}^{\,z}$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n\,!} = \mathrm{e}^{\,z}$$

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}$. On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{\,tz}$ entre 0 et 1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout entier naturel n, on a :
$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}(1-0)^k \right| \leqslant \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)\,!} \max_{t \in [0,1]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$
Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)} : t \longmapsto z^k\,\mathrm{e}^{\,tz}$ donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \mathrm{e}^{\,z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k\,!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)\,!}\,\mathrm{e}^{\,|\mathrm{Re}(z)|}$$
Comme $\frac{1}{(n+1)\,!}\,\mathrm{e}^{\,|\mathrm{Re}(z)|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a $\left| \mathrm{e}^{\,z} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k\,!} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, d'où le résultat. ■

II – Séries alternées

On appelle série alternée toute série de la forme $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs positives.

Théorème 1 (critère spécial des séries alternées) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels positifs telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Alors :

- ⋆ la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge ;
- ⋆ de plus, en notant $(\mathrm{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes de la série, alors pour tout entier naturel n, le reste R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $|\mathrm{R}_n| \leqslant u_{n+1}$;
- ⋆ la somme S de la série est telle que $0 \leqslant \mathrm{S} \leqslant u_0$.

Démonstration On note $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$. Ces deux suites sont adjacentes. En effet :

- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{S}_{2n+2} - \mathrm{S}_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_{2n+3} - \mathrm{S}_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0$$

  par décroissance de la suite u. Donc $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- ⋆ De plus :

$$\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  par hypothèse sur la suite u.

On en déduit que les suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limite commune $\mathrm{S} \in \mathbb{R}$. La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente de limite S, ce qui signifie que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge de somme S.

- ⋆ Le caractère adjacent des suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{S}_{2n+1} \leqslant \mathrm{S} \leqslant \mathrm{S}_{2n}$$

  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{R}_{2n} = \mathrm{S} - \mathrm{S}_{2n} \leqslant 0$$

  et le premier terme de la somme S_{2n} vaut $(-1)^{2n+1}u_{2n+1} = -u_{2n+1} \leqslant 0$ donc S_{2n} est du signe de $(-1)^{2n+1}$. De plus :

$$|\mathrm{R}_{2n}| = |\mathrm{S} - \mathrm{S}_{2n}| = \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S} \leqslant \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_{2n+1} = u_{2n+1}$$

- ⋆ On procède de la même manière pour R_{2n+1} et pour S. ■

Exemple 5 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la série (de Riemann alternée) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.

III – Séries à termes positifs

Définition 4 (série à termes positifs) Une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est dite *à termes positifs* si pour tout entier naturel n, on a $u_n \in \mathbb{R}_+$.

1) Critère de convergence

Le théorème de la limite monotone fournit un critère de convergence pour une série à termes positifs.

Proposition 7 (série à termes positifs et théorème de la limite monotone) Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs. La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces sommes partielles est croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = u_{n+1} \geqslant 0$$

Le résultat est une conséquence du théorème de la limite monotone. ■

Remarque : c'est faux si la série n'est pas à termes positifs. Par exemple, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n$ est à sommes partielles bornées mais elle diverge grossièrement.

Exemple 6 La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 \qquad \text{(car pour tout } k \geqslant 2 \text{ on a } k^2 \geqslant k(k-1))$$

donc cette série converge.

2) Comparaison de séries à termes positifs

Il est fréquent que l'on ne sache pas calculer les sommes partielles d'une série. Le résultat suivant permet d'étudier la nature d'une série.

Théorème 2 (théorème de comparaison, version 1) Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n \qquad (\text{ou : } \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n)$$

- ⋆ Si la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
- ⋆ Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Démonstration On note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles des séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ respectivement.

- ⋆ Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge. D'après la proposition précédente, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Notons $M \in \mathbb{R}_+$ un majorant de cette suite. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant M$$

  Donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge (d'après la proposition précédente).
- ⋆ Par contrapositon, on a le deuxième point. ■

Exemple 7 La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{2^n}$ est convergente. En effet, celle-ci est à termes positifs, de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{2^n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et on sait que la série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ est convergente.
On dispose d'un résultat analogue pour des termes généraux positifs et équivalents.

Théorème 3 (de comparaison, version 2) Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs tels que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration (dans le cas où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas) On a $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant 2v_n$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2v_n$ est convergente par hypothèse. Le théorème précédent permet de conclure. ■

Remarque : ce résultat ne nous dit rien sur les sommes en cas de convergence.

Exemple 8 La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3n^2+2}\,\mathrm{e}^{-n}$ est convergente. En effet, on a :

$$\frac{n^2+1}{3n^2+2}\,\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n,$$

les deux séries mises en jeu sont à termes positifs et la série géométrique de raison $\frac{1}{\mathrm{e}} \in]0,1[$ est convergente.

IV – Comparaison série-intégrale

Théorème 4 (de comparaison série-intégrale) Soit f une fonction continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles. Soit $M, N \in \mathbb{N}$ tels que $M \leqslant N$. Alors :

$$\int_M^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=M}^{N} f(n) \leqslant f(M) + \int_M^N f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration Soit $M, N \in \mathbb{N}$ tels que $M \leqslant N$. Pour tout entier $n \in [\![M, N]\!]$, on a (par décroissance de f sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

En sommant, on obtient :

$$\sum_{n=N}^{M} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=N}^{M} f(n) \leqslant f(M) + \sum_{n=N+1}^{M} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat d'après la relation de Chasles pour les intégrales. ■

Remarques :

- ⋆ Il ne faut pas apprendre ces inégalités mais il faut savoir les retrouver.
- ⋆ On obtient un résultat du même type (inégalités dans l'autre sens) pour une fonction décroissante.

✎✎✎ **Exercice 2** On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

En déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \tag{$*$}$$

par décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$.

- ⋆ En sommant les inégalités de droite sur les entiers $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad i.e. \qquad \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant S_n$$

  d'après la relation de Chasles. Ainsi, on a bien la minoration $\ln(n+1) \leqslant S_n$.
- ⋆ Les inégalités de gauche de $(*)$ se réécrivent :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \qquad \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$$

  En sommant cette fois sur les entiers $k \in [\![2, n]\!]$, on a :

$$S_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \qquad i.e. \qquad S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a $\ln(n) > 0$ donc :

$$1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

d'où l'équivalent annoncé en utilisant le théorème des gendarmes.

Corollaire 1 (séries de Riemann) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série (dite *de Riemann*) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration On distingue quatre cas.

- ⋆ **Premier cas :** si $\alpha \leqslant 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement).
- ⋆ **Deuxième cas :** $0 < \alpha < 1$.
  La $f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ donc (par comparaison série-intégrale) :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \int_{1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$$

  puisque $\alpha < 1$, d'où la divergence de la série.
- ⋆ **Troisième cas :** $\alpha = 1$ (c'est l'exercice précédent)
  On procède de la même manière.
- ⋆ **Quatrième cas :** $\alpha > 1$
  Ici :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \int_{1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

  D'après le critère de convergence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. ∎

V – Convergence absolue

1) Définition

Définition 5 (série absolument convergente) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge absolument* si la série (à termes positifs) $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Exemple 9 ⋆ Les séries à termes positifs convergentes sont absolument convergentes.

⋆ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ne l'est pas (en effet, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge tandis que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge).

⋆ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n\,!}$ est absolument convergente (puisque $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{|z|^n}{n\,!}$ est une série exponentielle).

⋆ Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{|n^{\mathrm{Re}(z)}|\,|n^{i\,\mathrm{Im}(z)}|} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$$

On en déduit que la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ est absolument convergente si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 1$.

2) Lien avec la convergence

Le lien entre les notions de convergence et de convergence absolue pour les séries est le suivant.

Proposition 8 Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration On traite séparément les cas réel et complexe.

⋆ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$u_n^+ = \max(0, u_n) \qquad \text{et} \qquad u_n^- = \max(0, -u_n)$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| = u_n^+ + u_n^-, \qquad u_n = u_n^+ - u_n^- \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant u_n^\pm \leqslant |u_n|$$

Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^\pm$ sont convergentes (d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs). La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est donc convergente (en tant que combinaison linéaire de séries convergentes).

⋆ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$$

Par comparaison, les séries réelles $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ convergent absolument et donc convergent (d'après le point précédent). Par linéarité, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n) + i\,\mathrm{Im}(u_n))$, *i.e.* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, converge. ■

Théorème 5 (de comparaison) Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que :

- ⋆ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$) ;
- ⋆ $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.

Démonstration (dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas) Par hypothèse, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant M v_n$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} M v_n$ converge par hypothèse donc, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument donc converge. ■

Remarque : si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est telle qu'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (ou tend vers 0), alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente (puisque l'on sait que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge).

Exemple 10 La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^3}$ converge (absolument) car $\frac{\sin(n)}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et car la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

3) Inégalité triangulaire

Proposition 9 (inégalité triangulaire) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument, alors :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration Tout d'abord, les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sont convergentes par hypothèse. Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire pour les sommes finies, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

car $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \geqslant 0$. Il suffit ensuite de passer à la limite quand N tend vers $+\infty$. ■

Exemple 11 On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} 2^{-n} \leqslant 2$ en majorant le terme général par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.