Dénombrement

Dans tout ce chapitre, on considère des ensembles finis. Le but est de savoir calculer (ou dénombrer) le cardinal d'un tel ensemble.

I – Cardinal d'un ensemble fini

1) Définitions et exemples

Conformément au programme de MPSI, nous adopterons une définition intuitive du cardinal d'un ensemble. De fait, un certain nombre de propriétés ne pourront pas être démontrées (et sembleront évidentes).

Définition 1 (cardinal d'un ensemble fini) Soit E un ensemble fini.

- ⋆ Le nombre d'éléments de E est appelé le *cardinal*. Ce nombre est noté $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$.
- ⋆ Ainsi, si on note $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $\mathrm{Card}(E) = n$.

Exemple 1

1. L'ensemble vide est un ensemble fini de cardinal 0 : $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.
2. L'ensemble des lettres de l'alphabet $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \dots, \mathrm{Z}\}$ est un ensemble fini de cardinal 26.
3. L'ensemble $E = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x^2 \leq 4\}$ est un ensemble fini de cardinal 9 : $\mathrm{Card}(E) = 9$.
   Justification. En effet, on peut aussi écrire $E = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Cet ensemble est bien fini de cardinal 9.
4. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$. Alors l'ensemble $[\![p, q]\!]$ est de cardinal $q - p + 1$.
   Justification. En effet, le nombre d'entiers compris entre p et q s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} 1$. Et on a calculé cette somme dans le chapitre 4.
5. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas fini. On dit qu'il est infini (dénombrable).

2) Cardinal d'un sous-ensemble

Proposition 1 Soient E un ensemble fini et F un sous-ensemble de E. Alors :

- l'ensemble F est fini et $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$;
- $F = E$ si et seulement si $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$;
- $\mathrm{Card}\big(\overline{F}\big) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(F)$.

Démonstration évident ■

3) Injections et surjections entre ensembles finis

Proposition 2 Soient E, F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si f est injective, alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
2. Si f est surjective, alors $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.
3. Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ et si f est injective, alors f est bijective.
4. Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ et si f est surjective, alors f est bijective.

Démonstration

1. Comme f est injective, $f(E)$ est un sous-ensemble de F admettant le même nombre d'éléments que E. De plus $\mathrm{Card}(f(E)) \leqslant \mathrm{Card}(F)$, d'où l'inégalité annoncée.
2. Si f est surjective, on a $f(E) = F$. Or le nombre d'éléments de E est supérieur ou égal à celui de E, d'où l'inégalité annoncée.
3. Si f n'est pas surjective, alors $f(E) \neq F$. Posons $\tilde{F} = f(E)$. Alors (par injectivité de f) :
$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(\tilde{F}) < \mathrm{Card}(F),$$
ce qui contredit l'hypothèse. Donc f est surjective.
4. Supposons que f ne soit pas injective. Il existe $x, x' \in E$ tel que $f(x) = f(x')$. Posons $\tilde{E} = E \setminus \{x'\}$ et notons $\tilde{f}$ la restriction de f à $\tilde{E}$. Alors $\tilde{f}$ est surjective de $\tilde{E}$ sur F donc $\mathrm{Card}(\tilde{E}) \geqslant \mathrm{Card}(F)$, ce qui est absurde car $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ et $\mathrm{Card}(\tilde{E}) < \mathrm{Card}(E)$. ■

Corollaire 1 Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors
$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Démonstration C'est une conséquence immédiate des points 3. et 4. de la proposition précédente. ■

4) Cardinal d'une réunion d'ensembles, du complémentaire d'un ensemble

⋆ **Cardinal d'une réunion disjointe.**

Proposition 3 Soient E et F deux ensembles finis *disjoints* (c'est-à-dire tels que $E \cap F = \varnothing$). Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et
$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$$

Démonstration évident ■

Notation : si E et F sont deux ensembles disjoints, la réunion $E \cup F$ se note aussi $A \sqcup B$.

Corollaire 2 (cardinal du complémentaire) Soient E un ensemble fini et F un sous-ensemble de E. Alors F est un ensemble fini et $\mathrm{Card}\big(\overline{F}\big) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(F)$.

Démonstration Les ensembles F et $\overline{F}$ sont disjoints ($F \cap \overline{F} = \varnothing$) et $F \cup \overline{F} = E$ donc, d'après la proposition précédente, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}\big(F \cup \overline{F}\big) = \mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}\big(\overline{F}\big)$. ■

Exemple 2 On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de possibilités d'obtenir au moins un roi ?

Solution. On considère l'événement complémentaire : aucune des deux cartes n'est un roi. Le complémentaire est de cardinal $\binom{28}{2}$ et l'ensemble des tirages possibles est de cardinal $\binom{32}{2}$. Donc le nombre de possibilités d'obtenir au moins un roi est $\binom{32}{2} - \binom{28}{2}$.

On peut généraliser la proposition précédente à une famille d'ensembles deux à deux disjoints.

Corollaire 3 Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles finis deux à deux disjoints, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$

Alors l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ est fini et $\displaystyle\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(A_i)$.

Démonstration On démontre cette propriété par récurrence sur le nombre p d'ensembles. Pour tout $p \geq 2$, on note $\mathscr{P}(p)$ la propriété : « pour toute famille $\{A_1, \ldots, A_p\}$ d'ensembles finis deux à deux disjoints, l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ est fini et $\displaystyle\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(A_i)$ ».

- **Initialisation :** si $p = 2$, alors la propriété est vraie d'après la proposition 3.
- **Hérédité :** on suppose que la propriété est vraie pour l'entier $p \geq 2$ et on démontre qu'elle reste vraie pour l'entier $p+1$. On considère $p+1$ ensembles finis et deux à deux disjoints $A_1, \ldots, A_p, A_{p+1}$. Par hypothèse de récurrence, on sait que l'ensemble $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ est fini et $A \cap A_{p+1} = \varnothing$. On sait d'après la proposition 3 que l'ensemble $A \cup A_{p+1}$ est fini et que $\mathrm{Card}(A \cup A_{p+1}) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(A_{p+1})$. Or A est la réunion disjointe de p ensembles finis deux à deux disjoints donc, par hypothèse de récurrence, on a
$$\mathrm{Card}(A) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(A_i) \quad \text{puis} \quad \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p+1} \mathrm{Card}(A_i)$$
- **Conclusion :** pour tout entier naturel $p \geq 2$, la propriété $\mathscr{P}(p)$ est vraie, ce qui démontre le corollaire. ■

⋆ Cardinal d'une réunion de deux ensembles (non nécessairement disjoints).

On peut aussi faire ce calcul lorsque les ensembles ne sont pas disjoints.

Proposition 4 (cardinal d'une réunion, cas général) Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

Démonstration Comme les ensembles A et B sont finis, leurs sous-ensembles $A \cap B$, $A \setminus B \subset A$ et $B \setminus A \subset B$ sont finis. De plus, ces ensembles sont deux à deux disjoints et $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. D'après la proposition précédente, on a alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \setminus B) + \mathrm{Card}(B \setminus A)$$

Or $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ tandis que $B \setminus A = \overline{A} \cap B$. Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B) &= \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}\big(A \cap \overline{B}\big) + \mathrm{Card}\big(\overline{A} \cap B\big) \\ &= \big[\mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}\big(A \cap \overline{B}\big)\big] + \big[\mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}\big(\overline{A} \cap B\big)\big] - \mathrm{Card}(A \cap B)\end{aligned}$$

Or les ensembles $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont disjoints donc

$$\mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}\big(A \cap \overline{B}\big) = \mathrm{Card}\big(\underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})}_{=A\cap(B\cup\overline{B})}\big) = \mathrm{Card}(A)$$

De la même manière $\mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}\big(\overline{A} \cap B\big) = \mathrm{Card}(B)$. On en déduit la formule annoncée. ■

Exemple 3 Dans une classe, tous les élèves suivent des cours d'anglais ou d'espagnol. Plus précisément, 25 font de l'anglais, 12 font de l'espagnol, et 8 font à la fois de l'anglais et de l'espagnol. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

5) Cardinal d'un produit cartésien

Proposition 5 Soient A et B deux ensembles finis. Alors l'ensemble $A \times B$ est fini et $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$.

Démonstration Notons n le cadinal de l'ensemble A et écrivons $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Alors

$$A \times B = \big\{(a,b)\,;\, a \in A \text{ et } b \in B\big\} = \big\{(a_i,b)\,;\, i \in [\![1,n]\!] \text{ et } b \in B\big\} = \bigcup_{i=1}^{n} \big(\{a_i\} \times B\big)$$

Or les ensembles $\{a_i\} \times B$ ($i \in [\![1,n]\!]$) sont deux à deux disjoints donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \times B) &= \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \big(\{a_i\} \times B\big)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\big(\{a_i\} \times B\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(B)\\ &= n\mathrm{Card}(B)\end{aligned}$$

et le résultat est démontré puisque $n = \mathrm{Card}(A)$. ■

Un raisonnement par récurrence permet alors d'en déduire les généralisations suivantes.

Corollaire 4

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors l'ensemble $A_1 \times \cdots \times A_n$ est fini et
$$\mathrm{Card}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathrm{Card}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(A_n)$$
2. Soit A un ensemble fini et n un entier naturel non nul. Alors l'ensemble A^n est fini et $\mathrm{Card}(A^n) = \mathrm{Card}(A)^n$.

Exemple 4 On tire successivement deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est le nombre de possibilité de tirer un 8 suivi d'une figure ?

Solution. On note H l'ensemble $\{8\,\mathrm{Ca}, 8\,\mathrm{Co}\, 8\,\mathrm{Tr}, 8\,\mathrm{Pi}\}$ et F l'ensemble des figures

$$F = \{V\,\mathrm{Ca}, V\,\mathrm{Co}, V\mathrm{Tr}, V\,\mathrm{Pi}, D\,\mathrm{Ca}, D\,\mathrm{Co}, D\mathrm{Tr}, D\,\mathrm{Pi}, R\,\mathrm{Ca}, R\,\mathrm{Co}, R\mathrm{Tr}, R\,\mathrm{Pi}\}$$

L'ensemble N correspondant aux couples de cartes « 8 puis une figure » est le produit cartésien $H \times F$. Alors $\mathrm{Card}(N) = \mathrm{Card}(H \times F) = \mathrm{Card}(H) \times \mathrm{Card}(F) = 4 \times 12 = 48$.

✎✎✎ **Exercice 1** Un restaurant propose pour son menu du jour 2 entrées, 4 plats et 3 desserts. Combien de menus différents sont possibles ?

Définition 2 Si E est un ensemble et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, un élément de E^n sera appelé une n-liste d'éléments de E. Il s'agit des éléments de la forme $(e_1, \ldots, e_n)$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i \in E$.

II – Arrangements et combinaisons

1) Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Soient E et F deux ensembles finis. L'ensemble des applications de E vers F est noté F^E.

Proposition 6 (cardinal de $\boldsymbol{F^E}$) L'ensemble F^E est fini et $\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$.

Démonstration Notons m le cardinal de l'ensemble E, n celui de F et écrivons $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Pour construire une application de E vers F, il faut associer à chaque élément de E un élement de F. Pour chaque élément de E, il y a donc n choix. Le nombre d'applications que l'on peut construire est donc :

$$\underbrace{n}_{\text{nombre de choix pour } f(e_1)} \times \underbrace{n}_{\text{nombre de choix pour } f(e_2)} \times \cdots \times \underbrace{n}_{\text{nombre de choix pour } f(e_m)} = n^m$$

d'où le résultat. ■

2) Arrangement et nombre d'injections

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une p-liste d'éléments de E est un élément de E^p (c'est-à-dire de la forme $(e_1, \ldots, e_p)$ où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $e_i \in E$).

Définition 3 (arrangement) Un arrangement de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts. Ainsi, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une p-liste d'éléments de E, dire que $(e_1, \ldots, e_p)$ est un arrangement signifie que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$$

Exemple 5 Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors les arrangements de 2 éléments de E sont $(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3)$ et $(3, 2)$.

Remarques ⋆ Dans un arrangement, aucun élément n'apparaît deux fois et l'ordre des éléments est important.
⋆ Il faut penser aux arrangements lorsqu'on choisit des éléments avec ordre et sans remise (par exemple pour un tirage successif sans remise).
⋆ Un arrangement est aussi appelé une p-liste sans répétition.

Proposition 7 (nombre d'arrangements) Le nombre d'arrangements de p éléments de E est

- $\mathrm{A}_n^p = 0$ si $p > n$;
- $\mathrm{A}_n^p = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$ si $p \in [\![1, n]\!]$.

Démonstration On note $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Pour construire une p-liste d'éléments de E, on a :

- n possibilités pour l'élément e_1 ;
- il reste $n-1$ possibilités pour l'élément e_2 parmi les éléments de $E \setminus \{e_1\}$;
- il reste $n-2$ possibilités pour l'élément e_3 parmi les éléments de $E \setminus \{e_1, e_2\}$;
- $\dots$;
- il reste $n-p+1$ possibilités pour l'élément e_n.

Il y a donc au total $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$. ■

Théorème 1 (nombre d'injections) Soient E et F deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(E) = p$ et $\mathrm{Card}(F) = n$ avec $p \in [\![1, n]\!]$. Le nombre d'injections de E vers F est égal à A_n^p.

Démonstration On rappelle qu'une application f est une injection de E dans F si tout élément de F admet au plus un antécédent par f. Pour construire une injection f de $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ dans F, on choisit une image de chacun des éléments de E.

- on a n choix pour $f(x_1)$ (tous les éléments de F) ;
- il reste $n-1$ choix possibles pour $f(x_2)$ (tous les éléments de $F \setminus \{f(x_1)\}$;
- il reste $n-2$ choix possibles pour $f(x_3)$ (tous les éléments de $F \setminus \{f(x_1), f(x_2)\}$;
- $\dots$;
- pour le dernier élément x_p, il reste $n-(p-1)$ choix pour $f(x_p)$ (tous les éléments de $E \setminus \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{p-1})\}$).

Le nombre d'injections de E dans F est donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \mathrm{A}_n^p$. ■

Exemple 6 Dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire successivement et sans remise 3 boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Solution. Le nombre de tirages possibles est le nombre d'arrangements de 3 éléments de l'ensemble $[\![1, 10]\!]$. Il y en a $\mathrm{A}_{10}^3 = \dfrac{10\,!}{(10-3)\,!} = 720$.

Exemple 7 Quel est le nombre de paris possibles au tiercé pour une course de 15 chevaux ?

3) Permutations et nombre de bijections

Définition 4 (permutation) Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle permutation de E une n-liste sans répétition de E. Ainsi, dans une permutation de E apparaissent une et une seule fois tous les éléments de E.

Exemple 8 Par exemple, une permutation de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ est la 5-liste $(2, 4, 1, 3, 5)$.

Proposition 8 Soit E est un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de permutations de E est égal à $n\,!$.

Démonstration Une permutation de E étant une n-liste sans répétition de E, le nombre de permutation de E est $\mathrm{A}_n^n = \dfrac{n\,!}{(n-n)\,!} = \dfrac{n\,!}{0\,!} = n\,!$ ■

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 9 Soit E un ensemble fini de cardinal n. Il y a $n\,!$ bijections de E dans E.

Démonstration Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. Comme E est fini, on sait d'après le corollaire 1 que f est injective si et seulement si f est bijective. Donc

$$\{f : E \longrightarrow E\,;\, f \text{ injective}\} = \{f : E \longrightarrow E\,;\, f \text{ bijective}\}$$

Ainsi, dénombrer l'ensemble $\{f : E \longrightarrow E\,;\, f \text{ bijective}\}$ revient à dénombrer l'ensemble $\{f : E \longrightarrow E\,;\, f \text{ injective}\}$. D'après le théorème 1, cet ensemble contient $\mathrm{A}_n^n = \dfrac{n\,!}{0\,!} = n\,!$ éléments. ■

Exemple 9
1. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « VETO ».
2. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « PRÉPA ».
3. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « ANANAS ».

Solution.
1. Le mot « VETO » est constitué des quatre lettres *distinctes* V, E, T et O. Le nombre de mots que l'on peut créer avec ces lettres correspond au nombre de permutations de l'ensemble $\{\mathrm{V}, \mathrm{E}, \mathrm{T}, \mathrm{O}\}$. Il y a donc $4\,! = 24$ anagrammes.
2. Si les cinq lettres du mot « PRÉPA » étaient distinctes, alors on aurait $5\,! = 120$ anagrammes. Mais la lettre P apparaît deux fois dans ce mot. On a donc compté plusieurs fois les mêmes anagrammes. On les a comptés autant de fois qu'il y a de permutations possibles de ces deux P, c'est-à-dire $2\,!$. Le nombre d'anagrammes est donc $\dfrac{120}{2\,!} = 60$.
3. Si les six lettres du mot « ANANAS » étaient distinctes, alors on aurait $6\,! = 720$ anagrammes. Or la lettre A apparaît trois fois, donc on a compté plusieurs fois les mêmes anagrammes, autant de fois qu'il y a de permutations possibles entre ces trois lettres A, c'est-à-dire $3\,!$ permutations. Pour la lettre N, il y $2\,!$ permutations de ces deux lettres. Au final, le nombre d'anagrammes du mot « ANANAS » est donc $\dfrac{6\,!}{3\,!\,2\,!} = 12$.

4) Combinaisons et nombre de sous-ensembles

Commençons par définir l'ensemble des parties d'un ensemble.

Définition 5 Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties de l'ensemble* E l'ensemble noté $\mathscr{P}(E)$ défini par

$$\mathscr{P}(E) = \big\{X\,;\, X \subset E\big\}$$

Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont donc des ensembles (ce sont les sous-ensembles de E).

✎✎✎ **Exercice 2**
1. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{0, 1\}$ est
$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, E\Big\}$$
2. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ est
$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\Big\}$$

Définition 6 Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$.
1. Une *p-combinaison* d'éléments de E est une partie de E contenant p éléments.
2. On note $\mathscr{P}_p(E)$ l'ensemble des p-combinaisons de E. On a donc
$$\mathscr{P}_p(E) = \big\{A \in \mathscr{P}(E)\,;\, \mathrm{Card}(A) = p\big\}$$

Exemple 10
1. $\{1,2,3,4\}$ et $\{2,3,1,7\}$ sont des 4-combinaisons de $[\![1,9]\!]$.
2. Les 2-combinaisons d'éléments de l'ensemble $\{\text{Sophie}, \text{Jean}, \text{Thibaut}\}$ sont les sous-ensembles $\{\text{Sophie}, \text{Jean}\}$, $\{\text{Sophie}, \text{Thibaut}\}$ et $\{\text{Jean}, \text{Thibaut}\}$.

✎✎✎ **Exercice 3** Déterminer les 3-combinaisons d'éléments de l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$.

Remarque. Dans une p-combinaison, il n'y a pas d'ordre et pas de répétition. Par exemple, $\{\text{Sophie}, \text{Thibaut}\}$ et $\{\text{Thibaut}, \text{Sophie}\}$ constituent la même 2-combinaison.

Proposition 10 Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in [\![0, n]\!]$. Le nombre de p-combinaisons de E est $\binom{n}{p} = \dfrac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}$. Autrement dit, $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_p(E)) = \binom{n}{p}$.

Démonstration On sait que le nombre de p-listes sans répétition d'éléments de E que l'on peut former est $\dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$. Considérons une p-combinaison de E, notée $A = \{e_1, \ldots, e_p\}$. Pour ce sous-ensemble de E, l'ordre n'a pas d'importance et il y a plusieurs p-listes sans répétition d'éléments de E qui forment cet ensemble A, autant de p-listes qu'il y a de permutations des éléments de A, c'est-à-dire $p\,!$. Le nombre de combinaisons de E est donc $\dfrac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!} = \binom{n}{p}$. ■

Remarque. Il faudra penser à utiliser les combinaisons pour choisir des éléments sans ordre et sans répétition (par exemple dans des problèmes de tirages *simultanés*).

Exemple 11
1. On tire au hasard 4 cartes parmi 10 distinctes. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?
2. Dans une classe de 25 élèves, on veut constituer aléatoirement un groupe de 5 personnes. Combien de groupes peut-on former ?

Solution.
1. On tire 4 cartes simultanément. Le nombre de combinaisons possibles est le nombre de 4-combinaisons de l'ensemble $[\![1, 10]\!]$. On sait qu'il y en a $\binom{10}{4} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$.
2. On choisit simultanément 5 élèves parmi les 25 élèves. On cherche donc le nombre de 5-combinaison de l'ensemble des 25 élèves. On sait qu'il y en a $\binom{25}{5} = 53130$.

5) Nombre de parties d'un ensemble fini

Proposition 11 Soit E un ensemble fini. Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et de cardinal $2^{\mathrm{Card}(E)}$.

Démonstration Notons n le cardinal de E. Un sous-ensemble A de E peut contenir 0 éléments au minimum (alors $A = \varnothing$) et jusqu'à n éléments au maximum (alors $A = E$) et toutes les valeurs entières entre 0 et n sont possibles. Ceci montre que

$$\mathscr{P}(E) = \bigcup_{p=0}^{n} \underbrace{\{A \in \mathscr{P}(E)\,;\, \mathrm{Card}(A) = p\}}_{\text{noté } \mathscr{P}_p(E)}$$

De plus, les ensembles $\mathscr{P}_p(E)$ $(0 \leq p \leq n)$ sont deux à deux disjoints. On sait alors que

$$\mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(E)\big) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Card}\big(\mathscr{P}_p(E)\big)$$

Or l'ensemble $\mathscr{P}_p(E)$ est l'ensemble des combinaisons de p éléments d'éléments de E et on sait qu'il y en a $\binom{n}{p}$. En utilisant pour finir la formule du binôme de Newton, il vient alors

$$\mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(E)\big) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$$

✎✎✎ **Exercice 4** Donner l'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{B, I, O\}$ et vérifier que la formule précédente est vérifiée pour l'ensemble E.

Pour résumer : dans les problèmes de dénombrement, on pensera

- ⋆ au produit cartésien d'un ensemble pour un tirage **successif** (l'ordre est donc important) *avec remise*
- ⋆ aux listes sans répétition d'un ensemble pour un tirage **successif** (l'ordre est donc important) *sans remise*
- ⋆ aux parties d'un ensemble pour un tirage **simultané**

On pensera également aux ensembles complémentaires, qui simplifie parfois le calcul (y penser quand il y a par exemple « au moins ») ou à écrire l'ensemble comme une réunion disjointe d'ensembles *simples*.

✎✎✎ **Exercice 5** Répondre aux questions après avoir identifier le type de dénombrement dont il s'agit :

1. Combien de mains peut-on former avec un jeu de 32 cartes ?
2. De combien de façons peut-on mélanger un jeu de 32 cartes ?
3. Un sac contient 26 jetons sur lesquels sont écrites les lettres de l'alphabet.
   (a) On tire une poignée de 4 jetons que l'on aligne pour former un mot de 4 lettres. Combien de mots sont possibles.
   (b) On tire un jeton, on note la lettre obtenue, on remet le jeton et on répète l'opération 4 fois. Combien de mots de 4 lettres peut-on obtenir ?
   (c) On tire une poignée de 4 lettres que l'on aligne dans l'ordre alphabétique. Combien de mots peut-on obtenir ?
4. Une plaque minéralogique est composée de 2 lettres, 3 chiffres puis 2 lettres. Combien de plaques minéralogiques sont possibles ?
5. On joue 4 fois de suite à pile ou face. Combien de parties sont possibles ?
6. De combien de façons peut-on disposer 4 personnes sur 6 chaises ?
7. Une grille de loto comporte 49 numéros et on doit en cocher 5. Combien de grilles différentes existe-t-il ?

6) Formules du triangle de Pascal et du binôme de Newton : preuves par dénombrement

On souhaite donner des nouvelles démonstrations aux formules évoquées par des arguments purement combinatoires.

Proposition 12 ⋆ **Formule du triangle de Pascal :** pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

⋆ **Formule du binôme de Newton :** pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons un ensemble de cardinal $n+1$ et soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Fixons un élément e de E. Dénombrons l'ensemble $\mathscr{P}_{k+1}(E)$ des parties de E constituées de cardinal $k+1$. On note :

— Q les parties de E constituées de $k+1$ éléments de $E \setminus \{e\}$ ($i.e$ $Q = \mathscr{P}_{k+1}(E \setminus \{e\})$;

— R les parties de E constituées de e et de k éléments de $E \setminus \{e\}$.

Alors on a l'égalité $P = Q \bigsqcup R$. Ainsi :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}_{k+1}(E)) = \mathrm{Card}(\mathscr{P}_{k+1}(E \setminus \{e\})) + \mathrm{Card}(\mathscr{P}_{k}(E \setminus \{e\})),$$

d'où la formule annoncée.

⋆ Le produit $(a+b)^n$ se développe en 2^n termes tous de la forme $a^k b^{n-k}$ où $k \in [\![0, n]\!]$. Si $k \in [\![0, n]\!]$ est fixé, alors le nombre de termes égaux à $a^k b^{n-k}$ est le nombre de façon de choisir k complexes a parmi les n facteurs du produit $(a+b) \times \cdots \times (a+b)$; il y en a exactement $\binom{n}{k}$. D'où la formule du binôme de Newton. ■