Déterminant

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Groupe symétrique et permutations d'un ensemble fini

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1) Rappels et compléments

On note S_n l'ensemble des applications bijectives $\sigma : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$.

Définition 1 (permutation) Une application bijective $\sigma : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ est appelée une *permutation* de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

On sait que $(S_n, \circ)$ est un groupe (de neutre $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$), appelé *groupe symétrique*, de cardinal $n\,!$. Ce groupe n'est pas commutatif.

Notation. Si $a_1, \ldots, a_p$ (où $p \leqslant n$) sont des éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$, on notera :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

Avec cette notation, l'application identité est $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

Exemple 1 $\star$ Le groupe S_2 est composé de deux éléments :

$$\mathrm{Id}_{[\![1,2]\!]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\star$ Le groupe S_3 est composée de $3\,! = 6$ éléments :

$$\mathrm{Id}_{[\![1,3]\!]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Notation. Pour alléger les notations, la composition $\sigma \circ \tau$ de deux éléments σ et τ de S_n est parfois notée plus simplement « $\sigma\tau$ ». On parlera du *produit* de σ par τ.

Exemple 2 Dans S_3, si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, alors :

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Attention : une composition se lit de la droite vers la gauche.

2) Cycle et décomposition d'une permutation

La notion d'orbite va nous permettre de décomposer une permutation en « produit » de permutations plus simples.

Définition 2 (orbite) Soient $\sigma \in S_n$ et $a \in [\![1, n]\!]$. On appelle *orbite de a selon σ* l'ensemble :

$$\mathrm{Orb}_\sigma(a) = \left\{\sigma^k(a) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

où σ^k désigne la composée $\sigma^k = \sigma \circ \cdots \circ \sigma$ (k fois).

L'orbite d'un point $a \in [\![1, n]\!]$ par une permutation $\sigma \in S_n$ est donc l'ensemble des points *atteignables* à partir de ce point par l'action de la permutation σ. Par exemple, si on considère la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$$

alors :
- $\mathrm{Orb}_\sigma(1) = \{1, 2, 3\} = \mathrm{Orb}_\sigma(2) = \mathrm{Orb}_\sigma(3)$;
- $\mathrm{Orb}_\sigma(4) = \mathrm{Orb}_\sigma(5) = \{4, 5\}$;
- $\mathrm{Orb}_\sigma(6) = \{6\}$.

Pour $\sigma \in S_n$ fixé, la relation binaire $\mathscr{R}$ sur $[\![1, n]\!]$ défini par :

$$\forall (a, b) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad a \mathscr{R} b \iff \left(\exists\, c \in [\![1, n]\!]^2,\ (a, b) \in \mathrm{Orb}_\sigma(c)\right)$$

est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les orbites de la permutation σ. On en déduit donc que les orbites (disjointes) d'une permutation $\sigma \in S_n$ forment une partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

Définition 3 (cycle) On appelle *cycle* toute permutation admettant une unique orbite non triviale (contenant au moins deux éléments).
- ⋆ L'orbite du cycle est alors appelée le *support* du cycle.
- ⋆ Le cardinal de l'orbite est appelé la *longueur* du cycle.

Exemple 3
1. Dans S_3, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur 3 (l'unique orbite est en effet $\{1, 2, 3\}$).
2. Dans S_4, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas cycle. Cette permutation admet effectivement deux orbites distinctes, à savoir $\{1, 2\}$ et $\{3, 4\}$.

Remarque : si $\sigma \in S_n$ est un cycle et si a est un élément de $[\![1, n]\!]$ n'appartenant pas au support de σ, alors $\sigma(a) = a$.

Notation. Si $\sigma \in S_n$ est un cycle dont l'unique orbite est $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, alors utilisera l'écriture abrégée :

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \end{pmatrix}$$

pour dire que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$,..., $\sigma(a_{p-1}) = a_p$ et $\sigma(a_p) = a_1$.

Exemple 4
- Dans S_3, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- Dans S_4, $\tau = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ désigne la permutation $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarque : si $\sigma \in S_n$ est un cycle de longueur k et que a est dans le support de σ, alors :

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & \sigma(a) & \sigma^2(a) & \ldots & \sigma^{k-1}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition 1 (cycles et commutativité) Deux cycles de S_n dont les supports sont disjoints commutent.

Démonstration Soient σ et τ deux cycles de supports notés $\text{supp}(\sigma)$ et $\text{supp}(\tau)$ et $a \in [\![1, n]\!]$.

- ⋆ **Premier cas :** $a \in \text{supp}(\sigma)$
  Alors $\sigma(a) \in \text{supp}(\sigma)$ et $\sigma(a) \notin \text{supp}(\tau)$ (car $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \varnothing$). Donc :
  $$(\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a)) = \sigma(a) \qquad \text{et} \qquad (\sigma\tau)(a) = \sigma(\tau(a)) = \sigma(a)$$
  car a et $\sigma(a)$ n'appartiennent pas au support de τ.
- ⋆ **Deuxième cas :** de la même manière, on a $(\sigma\tau)(a) = (\tau\sigma)(a)$ si $a \in \text{supp}(\tau)$.
- ⋆ **Troisième cas :** si $a \notin \text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\tau)$, alors on a encore égalité.

Finalement, $\sigma\tau = \tau\sigma$. ∎

Théorème 1 Toute permutation $\sigma \in S_n$ différente de l'identité peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de cycle à supports disjoints.

Démonstration Ce résultat est admis. ∎

Exemple 5

— Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$. Alors :
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

— Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Alors :
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Signature d'une permutation

Définition 4 (transposition) On appelle *transposition* tout cycle de S_n de longueur 2.

Ainsi, un cycle de S_n est une permutation de la forme $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \in S_n$ où $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ est tel que $i < j$.

Proposition 2 (décomposition d'une permutation comme produit de transpositions) Tout permutation de S_n peut s'écrire comme produit de transpositions.

Démonstration On utilise un raisonnement par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- ⋆ Pour $n = 1$, on a $S_1 = \{\text{Id}_{\{1\}}\}$ et la permutation $\text{Id}_{\{1\}}$ est le produit de 0 transposition.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que toute permutation de S_n se décomposition comme produit de transpositions. Soit $\sigma \in S_{n+1}$. La permutation :
  $$\tilde{\sigma} := \begin{pmatrix} n+1 & \sigma(n+1) \end{pmatrix} \sigma$$
  est tel que $\tilde{\sigma}(n+1) = n+1$ donc $\tilde{\sigma}_{[\![1,n]\!]}$ appartient à S_n. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\tilde{\sigma}$, ce qui nous donne une décomposition de σ comme produit de transpositions de S_{n+1}. ∎

Remarques :

⋆ Contrairement à la décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints, il n'y a pas unicité quand on décompose en produit de transpositions. Dans S_3 par exemple :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}$$

⋆ Si $\sigma = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_p\end{pmatrix} \in S_n$ est un cycle, alors :

$$\sigma = \begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & a_3\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}a_{p-1} & a_p\end{pmatrix}$$

Théorème 2 (signature) Il existe une unique application $\varepsilon : S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ telle que :

(*i*) pour toute transposition $\tau \in S_n$, on a $\varepsilon(\tau) = -1$;

(*ii*) ε est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ vers $(\{-1, 1\}, \times)$.

L'application ε est appelée *signature* sur S_n.

Démonstration Ce résultat est admis. ∎

Pour calculer la signature d'une permutation, il suffit donc de décomposer la décomposer en produit de transpositions et d'utiliser les propriétés de ε.

Exemple 6 Soit $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3\end{pmatrix} \in S_5$. Alors $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}$ donc :

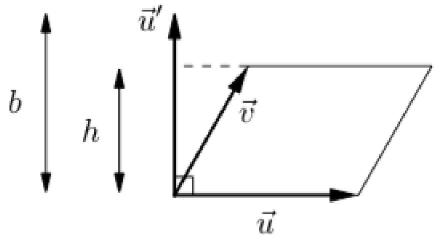
$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\right) = \varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\right)\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\right) = (-1)^2 = 1$$

Remarque : le noyau de ε est appelé groupe alterné et est noté A_n. Il s'agit d'un sous-groupe de A_n de cardinal $\frac{n!}{2}$ (pour $n \geqslant 2$).

II – Forme multilinéaire alternée

1) Motivation géométrique

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On considère l'aire algébrique $\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v})$ du parallélogramme de base les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, alors :

$$\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$$

On remarque qu'on a les propriétés suivantes :

⋆ $\mathscr{A}(\vec{v}, \vec{u}) = -\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v})$;

⋆ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$;

⋆ si $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, alors :

$$\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$

De même, on peut définir dans $\mathbb{R}^3$ le volume algébrique engendré par trois vecteurs (volume d'un parallélépipède). La définition suivante est une généralisation de la notion de volume en dimension quelconque. Le point de départ est la notion de forme multilinéaire.

Définition 5 (forme n-linéaire) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application :

$$f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow \mathbb{K}$$

est appelée une *forme n-linéaire* sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application :

$$f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

Autrement dit, une application f est une forme n-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ si elle est linéaire par rapport à chacune de ces n variables. Si $n = 1$, on retrouve la notion de forme linéaire.

Notation. On note $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$ l'ensemble des formes n-linéaires sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Remarques :

- ⋆ Lorsque les espaces vectoriels E_i sont tous égaux à un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on notera cet ensemble $\mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$.
- ⋆ On montre facilement que $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 7 — L'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \right.$ est une forme bilinéaire (ou 2-linéaire) sur $\mathbb{K}^2$.

— L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^\top B) \end{array} \right.$ est une forme bilinéaire sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

L'aire algébrique formée par deux vecteurs du plan est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 6 (forme symétrique, antisymétrique, alternée) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$. On dit que :

- ⋆ f est symétrique si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i < j \Longrightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

- ⋆ f est antisymétrique si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i < j \Longrightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

- ⋆ f est alternée si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \text{ et } x_i = x_j \Longrightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$$

Exemple 8 — L'application p est une forme bilinéaire symétrique.

— L'aire algébrique $\mathscr{A}$ est une forme bilinéaire antisymétrique alternée.

Remarque : autrement dit, f est antisymétrique si et seulement si, pour toute transposition $\tau \in S_n$ et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a :

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\tau) f(x_1, \dots, x_n)$$

2) Premières propriétés

Proposition 3 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$. Alors :

$$f \text{ est alternée} \iff f \text{ est antisymétrique}$$

Démonstration ($\Rightarrow$) Supposons que f soit alternée. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ te $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$. Calculons $f(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n)$. Comme f est alternée, on a :

$$f(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n) = 0$$

et, comme f est n-linéaire, on a aussi (en développant par rapport au i^{e} et j^{e} coordonnées,

$$\begin{aligned}
0 = f(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n) &= f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n) \\
&= f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\
&\qquad + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\
&= f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la caractère alterné de f. On en déduit que :

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

et donc f est antisymétrique.

($\Leftarrow$) Supposons que f soit antisymétrique et fixons $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ tel que $x_i = x_j$. Comme f est antisymétrique, on a :

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

Comme $x_i = x_j$, cela signifie que $f(x_1, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_n)$, soit encore $2f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ puis $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. La forme f est donc alternée. ■

Notation. On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées (c'est-à-dire antisymétriques). On montre facilement que $\Lambda_n(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \Lambda_n(E)$. Pour toute famille *liée* $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on a $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Démonstration Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille liée. Alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a donc :

$$x_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}\right) x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \mu_i x_i$$

en posant $\mu_i := -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_0\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= f\left(x_1, \ldots, x_{i_0 - 1}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \mu_i x_i, x_{i_0+1}, \ldots, x_n\right) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \mu_i \underbrace{f(x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_i, x_{i_0+1}, \ldots, x_n)}_{=0 \text{ car } f \text{ est alternée}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \Lambda_n(E)$. Alors :

$$\forall \sigma \in S_n,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \qquad f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$$

Démonstration Soient $\sigma \in S_n$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On décompose σ comme un produit de transposition : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\tau_1, \ldots, \tau_p) \in (S_n)^p$ des transpositions telles que $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_p$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) &= f(x_{\tau_1(\tau_2\ldots\tau_p(1))}, \ldots, x_{\tau_1(\tau_2\ldots\tau_p(n))}) \\ &= \varepsilon(\tau_1) f(x_{\tau_2\ldots\tau_p(1)}, \ldots, x_{\tau_2\ldots\tau_p(n)}) \\ &= \varepsilon(\tau_1)\ldots\varepsilon(\tau_p) f(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{(récurrence immédiate)} \\ &= \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

car ε est un morphisme de groupes. ■

III – Déterminant

Dans cette partie, on considère un entier naturel n non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1) Déterminant d'une famille de vecteurs

Théorème 3 Il existe une unique forme n-linéaire alternée $f \in \Lambda_n(E)$ telle que $f(\mathscr{B}) = 1$.

Démonstration La démonstration de ce résultat n'est pas exigible. Nous nous contenterons de justifier l'unicité. Soient $f \in \Lambda_n(E)$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe une unique famille $(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$ de scalaires telle que :

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$$

Alors :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_{i,n} e_i\right)$$

Commençons par traiter le cas $n = 2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = f(x_{1,1}e_1 + x_{2,1}e_2, x_{1,2}e_1 + x_{2,2}e_2) \\ &= x_{1,1}x_{1,2} f(e_1, e_1) + x_{1,1}x_{2,2} f(e_1, e_2) + x_{2,1}x_{1,2} f(e_2, e_1) + x_{2,1}x_{2,2} f(e_2, e_2) \\ &= x_{1,1}x_{2,2} f(e_1, e_2) + x_{2,1}x_{1,2} f(e_2, e_1) \\ &= (x_{1,1}x_{1,2} - x_{2,1}x_{1,2}) f(e_1, e_2) \end{aligned}$$

car f est alternée. On conjecture alors que, dans le cas général,

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} f(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}\right) f(e_1, \ldots, e_n), \end{aligned}$$

ce que l'on démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Définition 7 (déterminant) L'unique forme $f \in \Lambda_n(E)$ telle que $f(\mathscr{B}) = 1$ est appelée déterminant dans la base $\mathscr{B}$. On le note $\det_{\mathscr{B}}$.

Remarques :

- ⋆ On a donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.
- ⋆ De plus, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on a (*cf.* calcul dans la démonstration précédente) :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}$$

en posant $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

Exemple 9 — Dans $\mathbb{R}^2$: soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Le déterminant de (x, y) dans la base canonique $\mathscr{B}_c = ((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\det_{\mathscr{B}_c}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

ce qui correspond à la quantité $\mathscr{A}(x, y)$ introduite au début du chapitre.

— Dans $\mathbb{R}^3$: si $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ et $z = (z_1, z_2, z_3)$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors (ici $\mathscr{B}_c$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$) :

$$\det_{\mathscr{B}_c}(x, y, z) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)}$$

avec :

$$S_3 = \big\{\mathrm{Id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3), (1\ 2), (2\ 3)\big\}$$

donc :

$$\det_{\mathscr{B}_c}(x, y, z) = \underbrace{x_1 y_2 z_3}_{\mathrm{Id}} + \underbrace{x_2 y_3 z_1}_{(1\ 2\ 3)} + \underbrace{x_3 y_1 z_2}_{(1\ 3\ 2)} - \underbrace{x_3 y_2 z_1}_{(1\ 3)} - \underbrace{x_2 y_1 z_3}_{(1\ 2)} - \underbrace{x_1 y_3 z_2}_{(2\ 3)}$$

Proposition 6 (forme n-linéaire alternée et déterminant) Soit $f \in \Lambda_n(E)$. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathscr{B}}$.

Démonstration Nous l'avons établi dans la démonstration précédente, avec $\lambda = f(e_1, \ldots, e_n)$. ■

Remarque : l'espace vectoriel $\Lambda_n(\mathbb{K})$ est donc de dimension 1 ; il s'agit de la droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathscr{B}}$.

Le déterminant permet de caractériser les bases d'un espace vectoriel.

Proposition 7 Soit $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$$

Démonstration On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ soit une base de E. Alors $\det_{\mathscr{F}} \in \Lambda_n(E)$. Comme $\Lambda_n(E)$ est une droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathscr{B}}$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathscr{B}} = \lambda \det_{\mathscr{F}}$. Ainsi :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det_{\mathscr{F}}(\mathscr{F}) = \lambda$$

par définition du déterminant. De plus :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1 = \lambda \det_{\mathscr{F}}(\mathscr{F})$$

donc $\lambda \neq 0$. Il s'ensuit que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathscr{F}$ ne soit pas une base de E. Comme $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$, la famille $\mathscr{F}$ est liée. Comme $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée, on en déduit que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = 0$. ■

La première implication de la preuve ci-dessus nous donne la relation suivante.

Proposition 8 Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors :

$$\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \det_{\mathscr{B}'}$$

2) Déterminant d'une matrice carrée

Définition 8 (déterminant d'une matrice) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de M* le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Notation. Le déterminant d'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sera noté $\det(M)$ ou encore :

$$\begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}$$

Remarque : si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a donc :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}$$

Exemple 10
1. $\det(I_n) = 1$
2. si $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, alors :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Proposition 9 (propriétés du déterminant) Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(*i*) $\det(A^\top) = \det(A)$;

(*ii*) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$;

(*iii*) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;

(*iv*) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration (i) On a (formule du déterminant) :

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),\sigma^{-1}(\sigma(i))}$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

en effectuant le changement d'indice $j = \sigma^{-1}(i)$ dans le produit. Comme S_n est un groupe, on a :

$$\left\{\sigma^{-1} \,\middle|\, \sigma \in S_n\right\} = S_n$$

donc :

$$\det(A) = \sum_{\tau\in S_n}\prod_{j=1}^{n} a_{j,\tau(j)} = \det(A^\top)$$

(ii) Une matrice est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes forme une base de $\mathbb{K}^n$. Ceci équivaut à la non-annulation de cette famille de vecteurs $(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$, c'est-à-dire à la non-annulation du déterminant de la matrice (par définition du déterminant d'une matrice).

(iii) On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. L'application :

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^n)^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n)B\big) \end{array}\right.$$

est une forme n-linéaire (par composition d'applications n-linéaires) qui est alternée (car det l'est). Comme $\Lambda_n(E)$ est une droite vectorielle, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \varphi(M) = \lambda \det(M)$$

c'est-à-dire :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \det(MB) = \lambda \det(M)$$

En évaluant en $M = I_n$, on obtient $\lambda = \det(B)$, d'où le résultat annoncé.

(iv) Cette formule provient du caractère n-linéaire du déterminant. ■

Corollaire 1 Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Démonstration Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Comme A est inversible, on sait que $\det(A) \neq 0$ et que :

$$\det(I_n) = 1 = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

d'où le résultat en divisant par $\det(A)$. ■

3) Déterminant d'un endomorphisme

Proposition/définition 1 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors la quantité $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$ ne dépendant pas du choix de la base $\mathscr{B}$ de E. Cette quantité est appelée *déterminant de l'endomorphisme f de E* et il est noté $\det(f)$.

Démonstration Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$. On sait alors que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P$$

donc (propriété relative au déterminant du produit de deux matrices) :

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)) &= \det(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P)\\ &= \det(P^{-1})\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))\det(P)\\ &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))\end{aligned}$$ ■

✎✎✎ **Exercice 1** Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, -x-y) \end{cases}$$

L'endomorphisme f est-il bijectif ? Justifier.

Proposition 10 Soient $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$;

(ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det(f^k) = \det(f)^k$ où $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k fois) ;

(iii) $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$;

(iv) $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0$.

Démonstration Tout découle des propriétés du déterminant matriciel. ■

Remarque : l'application $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ est donc un morphisme (surjectif) de groupes.

IV – Calculs pratiques

1) Déterminant d'une matrice triangulaire

Proposition 11 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Démonstration Quitte à remplacer A par A^{T} (ce qui ne change pas la valeur du déterminant), on peut supposer que $A \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. Soit $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Il existe alors nécessairement $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) > i$, et donc $a_{\sigma(i),i} = 0$, d'où la formule annoncée. ■

Exemple 11 — $\det(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$.

— $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$

2) Effet des opérations élémentaires sur le déterminant

Nous avons introduit les opérations élémentaires dans le chapitre sur les matrices et les systèmes. Le déterminant étant une forme linéaire alternée, les effets de ces opérations sont les suivants :

— échanger deux colonnes ($C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 ;

— multiplier une colonne par un scalaire non nul λ ($C_i \leftarrow \lambda C_i$) multiplie le déterminant par λ

— ajouter une colonne à une autre ($C_i \leftarrow C_i + C_j$, où $j \neq i$) ne modifie par le déterminant.

On peut également faire des opérations élémentaires sur les lignes et les effets sont les mêmes (puisqu'une matrice et sa transposée ont le même déterminant).

Exemple 12 Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Une solution. On commence par effectuer l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$:

$$D_n(x) = (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots 1 & \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on réalise maintenant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_1$, ce qui donne :

$$D_n(x) = (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$$

3) Développement suivant une ligne ou une colonne

Définition 9 (mineur et cofacteur) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- ⋆ On appelle *mineur* d'indices i et j la matrice extraite de A suivante :

$$\mathrm{Min}_{i,j}(A) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant k,\ell \leqslant n \\ k \neq i \\ \ell \neq j}}$$

- ⋆ On appelle cofacteur d'indices i et j le scalaire :

$$\mathrm{Cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det(\mathrm{Min}_{i,j}(A))$$

Remarques :

- ⋆ Pour obtenir le mineur d'indices i et j, on supprime donc la ligne i et la colonne j de la matrice A.
- ⋆ Pour une matrice de taille 3×3, il y a donc 9 mineurs et autant de cofacteurs.

Exemple 13 Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, on a :

i	j	$\mathrm{Min}_{i,j}(A)$	$\mathrm{Cof}_{i,j}(A)$
1	1	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$	$5 \times 9 - 6 \times 8$
1	2		
1	3		
2	1		
2	2		
2	3		
3	1		
3	2		
3	3		

Proposition 12 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- ⋆ Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \operatorname{Cof}_{i,j}(A)$$

- ⋆ Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \operatorname{Cof}_{i,j}(A)$$

Démonstration Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Posons $A = (a_{i,\ell})_{1 \leqslant i,\ell \leqslant n}$ et notons $A_1, \ldots, A_n$ les matrices colonnes de A. Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors :

$$\forall \ell \in [\![1,n]\!], \qquad A_\ell = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\ell} e_i$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det_{\mathscr{B}}(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_n) \\
&= \det_{\mathscr{B}}\left(A_1, \ldots, A_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i, A_{j+1}, \ldots, A_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(A_1, \ldots, A_{j-1}, e_j, A_{j+1}, \ldots, A_n)}_{\text{noté } D_{i,j}}
\end{aligned}$$

par n linéarité du déterminant dans la base $\mathscr{B}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & a_{i-1,j-1} & 0 & & & \vdots \\
a_{i,1} & \ldots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \ldots & a_{i,n} \\
\vdots & & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & a_{n-1,n} \\
a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n}
\end{vmatrix}$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Calculons le déterminant $D_{i,j}$. En effectuant les opérations élémentaires $C_j \leftrightarrow C_{j+1}$, $C_{j+1} \leftrightarrow C_{j+2}$,..., $C_{n-1} \leftrightarrow C_n$, on a :

$$D_{i,j} = (-1)^{n-j} \begin{vmatrix}
a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & a_{i-1,j-1} & & & \vdots & 0 \\
a_{i,1} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \ldots & a_{i,n} & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} & 0 \\
a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} & 0
\end{vmatrix}$$

On effectue ensuite les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_{i+1}$, $L_{i+1} \leftrightarrow L_{i+2}$, $L_{n-1} \leftrightarrow L_n$ pour obtenir :

$$D_{i,j} = \underbrace{(-1)^{2n-(i+j)}}_{=(-1)^{i+j}} \begin{vmatrix}
a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & a_{i-1,j-1} & & & \vdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & a_{j+1,j+1} & & \vdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} & 0 \\
a_{i,1} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \ldots & a_{i,n} & 1
\end{vmatrix}$$

En explicitant ce déterminant (avec la définition), les seules permutations σ de S_n qui donnent une contribution non nulle sont celles telles que $\sigma(n) = n$. On obtient :

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{i-1,j-1} & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & a_{j+1,j+1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det(\mathrm{Min}_{i,j}(A)) = \mathrm{Cof}_{i,j}(A),$$

ce qui démontre la première formule annoncée. Le calcul est analogue pour la seconde. ■

Exemple 14 On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

En pratique, on calcule un déterminant en faisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes (pour simplifier le calcul du déterminant) et on se ramène à la proposition précédente.

Exemple 15 Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

4) Déterminant de Vandermonde

Théorème 4 (déterminant de Vandermonde) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On pose :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \det\left(\left(x_i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \text{(déterminant de Vandermonde)}$$

Alors :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

En particulier, ce déterminant est non nul si et seulement si les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Démonstration Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on effectue l'opération élémentaire $C_k \leftarrow C_k - x_n C_{k-1}$ (dans l'ordre décroissant) :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-1}(x_{n-1} - x_n) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant par rapport à la dernière ligne :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1-x_n) \\ x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) \end{vmatrix} \qquad \text{(déterminant d'ordre } n\text{)}$$

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on remarque la présence du facteur $x_i - x_n$ sur la i^{e} ligne du déterminant donc, par multilinéarité, on obtient :

$$\begin{aligned} V_n(x_1,\dots,x_n) &= (-1)^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-x_n)\right)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)\right)V_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \end{aligned}$$

Or $V_2(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ donc un raisonnement par récurrence fournit :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{k=2}^{n}\prod_{i=1}^{k-1}(x_k-x_i) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i),$$

d'où le résultat. ■

Retour sur l'interpolation polynomiale et les polynômes de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et des scalaires $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in \mathbb{K}$ où $x_1,\dots,x_n$ sont deux à deux distincts. On sait qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ (de degré au plus $n-1$) tel que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad P(x_k) = y_k$$

Plus exactement, il s'agit du polynôme :

$$P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$$

où $L_1,\dots,L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés aux scalaires $x_1,\dots,x_n$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad L_i = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\frac{X-x_k}{x_i-x_k}$$

L'existence et l'unicité d'un tel polynôme peut être (re)démontré à l'aide du résultat connu sur le déterminant de Vandermonde. En effet, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors :

$$\begin{aligned} (\forall i \in [\![1,n]\!],\ P(x_i) = y_i) &\iff \left(\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_i^j = y_i\right) \\ &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{notée } \mathscr{V}_n(x_1,\dots,x_n}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce système linéaire est compatible si et seulement si la matrice $\mathscr{V}_n(x_1,\dots,x_n)$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $V_n(x_1,\dots,x_n) \neq 0$, ce qui est le cas puisque les scalaires $x_1,\dots,x_n$ sont deux à deux distincts.

5) Inversion de matrices

Définition 10 (comatrice) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice* de A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\operatorname{Com}(A)$, dont le coefficient en position $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ est le cofacteur $\operatorname{Cof}_{i,j}(A)$.

Exemple 16 — Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

— Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\operatorname{Com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 13 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \operatorname{Com}(A)^{\mathrm{T}} = \operatorname{Com}(A)^{\mathrm{T}} A = \det(A) I_n$$

Ainsi, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Com}(A)^{\mathrm{T}}$$

Démonstration Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $A \operatorname{Com}(A)^{\mathrm{T}} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$. On sait que :

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \left(\operatorname{Com}(A)^{\mathrm{T}}\right)_{k,j} = b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \operatorname{Cof}_{j,k}(A)$$

On distingue deux cas.

- ⋆ **Premier cas :** $j = i$

  Alors :

  $$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \operatorname{Cof}_{i,k}(A) = \det(A)$$

  en développant le déterminant par rapport à la ligne i.

- ⋆ **Deuxième cas :** $j \neq i$

  Ici :

  $$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \operatorname{Cof}_{j,k}(A) = 0$$

  En effet, ce déterminant est celui de la matrice de taille $n \times n$ dont toutes les lignes sont celles de A, sauf la j^{e} qui correspond à la i^{e} ligne de A. Comme cette matrice à deux lignes identiques, le déterminant est nul. ■

Exemple 17 — Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, on retrouve l'expression de l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$