Applications linéaires : aspect matriciel

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère ici trois espaces vectoriels E, F et G que l'on suppose de dimensions finies respectives $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On munit E d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, F d'une base $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ et G d'une base $\mathscr{G} = (g_1, \ldots, g_q)$.

I – Matrice(s) d'une application linéaires

1) Matrices et vecteurs

Définition 1 (matrice d'un vecteur dans une base donnée) Soit $x \in E$. Il existe un unique n-uplet de scalaires $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. On appelle **matrice de x dans la base $\mathscr{B}$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, la matrice colonne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Exemple 1 Dans la base $\mathscr{B} = \big((1,0),(1,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) = (x-y)\cdot(1,0) + y\cdot(1,1)$$

donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((x,y)\big) = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$$

Proposition 1 L'application :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration La linéarité est claire. De plus :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, \qquad x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}) \iff (\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = 0)$$

ce qui entraîne l'injectivité de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$. On conclut avec les dimensions des deux espaces mis en jeu. ■

On peut également définir la matrice d'une famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_k)$ dans la base $\mathscr{B}$ de E ; il s'agit de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ de $\mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ dont la i^{e} colonne contient les coordonnées de u_i dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple 2 La matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la famille $\big((1,0,1),(0,2,3)\big)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Matrices et applications linéaires

Définition 2 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E et F**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la matrice de la famille $f(\mathscr{B})$ dans la base $\mathscr{C}$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(\mathscr{B}))$$

Remarques.

- ⋆ Cette matrice est de taille $p \times n$.
- ⋆ Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et si $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, cette matrice est notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ (au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$).
- ⋆ Concrètement, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(\mathscr{B}))$ est celle des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Exemple 3

1. Considérons l'application linéaire suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x+y, 3y) \end{array} \right.$$

Posons $\mathscr{B} = \big((1,0),(1,1)\big)$ et $\mathscr{C} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\big)$. On vérifie facilement que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ respectivement. De plus :

$$f(1,0) = (2,1,0) = 2\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,1,1)$$

et :

$$f(1,1) = (3,2,3) = 3\cdot(1,0,0) + (-1)\cdot(0,1,0) + 3\cdot(0,1,1)$$

On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Considérons $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (une base est donc $\mathscr{B}(1,i)$) et la similitude $f_{a,b} : z \in \mathbb{C} \longmapsto az+b$. La matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}$ est :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a)+\mathrm{Re}(b) & \mathrm{Re}(b)-\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(b) & \mathrm{Im}(b)+\mathrm{Re}(a) \end{pmatrix}$$

Remarques.

- ⋆ Si $\tilde{0} : E \longrightarrow F$ est l'application linéaire nulle, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\tilde{0}) = 0_{p,n} \qquad \text{(matrice nulle)}$$

- ⋆ On a également $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$.
- ⋆ Par contre, si E est muni de deux bases différentes $\mathscr{B} \neq \mathscr{C}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_E) \neq I_n$ en général. Par exemple, si on munit $\mathbb{R}^2$ des bases $\mathscr{B} = \big((1,0),(1,1)\big)$ et $\mathscr{C} = \big((1,0),(0,1)\big)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$$

Proposition 2 L'application :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration La linéarité est claire, de même que l'injectivité. Les deux espaces mis en jeu sont de même dimension np. ■

Remarques :

- ⋆ Le caractère linéaire de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ signifie que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f,g \in \mathscr{L}(E,F), \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f+\lambda g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$$

- ⋆ Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. D'après la proposition précédente, il existe une unique application linéaire $f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ donc la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}^p$ est la matrice A. On l'appelle application linéaire canoniquement associée à A. Par exemple, l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est :

$$f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 4x+5y+6z) \end{array} \right.$$

Cette identification permet de définir le noyau, l'image et le rang d'une matrice :

Définition 3 Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ d'application linéaire canoniquement associée notée $f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$. On définit le noyau, l'image, et le rang de A comme suit :

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f_A), \qquad \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f_A) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f_A)$$

Exemple 4 Donner le noyau, l'image et le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque : Les colonnes d'une matrice A constituent donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$. Quant aux lignes, elles fournissent un système d'équation cartésiennes de $\mathrm{Ker}(A)$.

Proposition 3 Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

Démonstration Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$. Posons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \big(u_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Par linéarité de u, on a :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{p} u_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} x_j \right) f_i,$$

d'où l'égalité annoncée. ■

3) Matrice et composition d'applications linéaires

Proposition 4 Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v)\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$$

Démonstration Posons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \big(u_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) = \big(v_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant p}}$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On a (par linéarité de u et de v) :

$$\begin{aligned}(v\circ u)(e_j) = v(u(e_j)) = v\left(\sum_{i=1}^{p} u_{i,j} f_i\right) &= \sum_{k=1}^{p} u_{k,j} v(e_k)\\ &= \sum_{k=1}^{p} u_{k,j} \sum_{i=1}^{q} v_{i,k} g_i\\ &= \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} v_{i,k} u_{k,j}\right) g_i\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{G}}(v\circ u)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} v_{i,k} u_{k,j}$$

ce qui démontre l'égalité annoncée. ■

Corollaire 1 On suppose ici que E est muni de $\mathscr{B}$ (*i.e.* $\mathscr{C} = \mathscr{B}$). L'application :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\end{array}\right.$$

est un isomorphisme d'anneaux (et d'espaces vectoriels).

Démonstration Les seules nouveautés sont :

$$\forall u, v \in \mathscr{L}(E), \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$

et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$, ce qui est désormais acquis. ■

Remarque : si $n \geqslant 2$, alors $\mathscr{L}(E)$ n'est pas commutatif (pour la composition) puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ne l'est pas.

Corollaire 2 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible. Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\big)^{-1}$$

Démonstration On raisonne par double implication.

- ⋆ Si f est bijective de réciproque f^{-1}, alors on sait que $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$ et :

  $$I_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^{-1}\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

  De même, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = I_n$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible et on a l'égalité matricielle annoncée.
- ⋆ Réciproquement, supposons que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ soit inversible. On note $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ son inverse. On note g l'application linéaire de F vers E dont la matrice dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ est M. Alors on a les égalités :

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(f\circ g) = I_n$$

  Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}}$ sont injectives donc $g\circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f\circ g = \mathrm{Id}_F$, ce qui prouve le caractère bijectif de f. ■

Exemple 5 L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

4) Critère d'inversibilité d'une matrice

Proposition 5 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ (on dit que A est *inversible à droite*), alors A est inversible d'inverse $A^{-1} = B$.

Remarque : on dispose du même résultat si A est inversible à gauche.

Démonstration Notons f_A et f_B les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à f_A et à f_B. L'égalité $AB = I_n$ se réécrit (en notant $\mathscr{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(f \circ g) = I_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}),$$

c'est-à-dire $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ par injectivité de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}$. Il s'ensuit que f est surjective et donc bijective (en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie). Par unicité de la réciproque d'une application, on a nécessairement $f^{-1} = g$. On a donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ se qui s'écrit matriciellement $BA = I_n$. Finalement, A est inversible d'inverse B. ■

Proposition 6 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

(ii) $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$

(iii) les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$

(iv) $\mathrm{rg}(A) = n$

Démonstration Soit f_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Alors :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f_A \text{ bijective} \iff f_A \text{ injective} \iff f_A \text{ surjective},$$

d'où les différentes équivalences. ■

Conséquence : une matrice $T \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ (triangulaire) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

5) Retour sur les systèmes linéaires

Considérons $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et le système linéaire $\mathscr{S} : AX = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. L'équation homogène associée est :

$$\mathscr{H} : AX = 0_{n,1}$$

On a $\mathrm{Sol}(\mathscr{H}) = \mathrm{Ker}(A)$.

Définition 4 (rang d'un système) On appelle rang de $\mathscr{S}$, noté $\mathrm{rg}(\mathscr{S})$, le rang de la matrice A, *i.e.* :

$$\mathrm{rg}(\mathscr{S}) = \mathrm{rg}(A)$$

Remarque : $\mathrm{rg}(\mathscr{S}) \leqslant \min(n, p)$.

Proposition 7 L'espace vectoriel $\mathrm{Sol}(\mathscr{H}) \subset \mathbb{K}^p$ est de dimension $p - r$, où $r = \mathrm{rg}(\mathscr{S})$.

Démonstration Notons $f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors $\text{rg}(f_A) = \text{rg}(A) = r$ (par définition du rang d'une matrice) et l'ensemble $\text{Sol}(\mathscr{H})$ est isomorphe à $\text{Ker}(f)$ (*via* l'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}$ qui associe à un vecteur de $\mathbb{K}^p$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$). En particulier, ces deux espaces ont la même dimension et on déduit le résultat du théorème du rang. ■

Remarques.

- ⋆ Si $n < p$ (moins d'équations que d'inconnues), alors $r \leqslant< p$ et donc $\dim(\text{Sol}(\mathscr{H})) > 0$. Le système homogène admet donc une infinité de solutions.
- ⋆ Passons maintenant au système $\mathscr{S}$. Celui-ci est compatible si et seulement si $B \in \text{Im}(A)$.

De plus :

Proposition 8 Si $\mathscr{S}$ est compatible et si $X_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière, alors $\text{Sol}(\mathscr{S})$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de dimension $r - p$, où r est le rang du système.

Démonstration On sait en effet que :

$$\text{Sol}(\mathscr{S}) = X_0 + \text{Sol}(\mathscr{H})$$

et on connaît la dimension de $\text{Sol}(\mathscr{H})$. ■

Remarque : si A est carrée est inversible, alors on sait $\mathscr{S}$ admet une unique solution (qui est $A^{-1}X_0$). Dans ce cas, la dimension de l'espace affine associée est 0 (ce qui est rassurant). On parle de système de Cramer.

II – Changements de base

1) Matrices de passage

On suppose que E et F sont de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et que E est muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ tandis que F est muni de deux bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Définition 5 (matrice de passage) On appelle *matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$* la matrice carrée notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ suivante :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$$

Remarque : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = textrmMat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\text{Id}_E)$.

Exemple 6 Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les bases $\mathscr{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$ et $\mathscr{B}' = \big((1,0),(1,1)\big)$. Alors :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 9 On a :

(i) $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

(ii) et $\big(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\big)^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$

Démonstration D'après le lien entre le produit de matrices et la composition des applications, on a :

$$\begin{aligned} P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\text{Id}_E)\,\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\text{Id}_E) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\text{Id}_E \circ \text{Id}_E) \\ &= \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\text{Id}_E) \\ &= I_n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Connaissant les coordonnées d'un vecteur dans une base $\mathscr{B}$ donnée, la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ permet d'obtenir les coordonnées du-dit vecteur dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$.

Proposition 10 Pour tout $x \in E$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

Démonstration Pour tout $x \in E$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E) \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x),$$

d'où le résultat. ■

Exemple 7 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Considérons la base $\mathscr{B} = \big((1,0),(1,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}$$

Les matrices de passages permettent également de trouver la matrice d'une application linéaire dès lors que l'on change les bases.

Proposition 11 On a l'égalité :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}} \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

Démonstration On a l'égalité $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{Id}_F) \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E),$$

d'où le résultat. ■

Remarque (cas particulier) : si $E = F$ et si $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$, alors on a, en posant $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P^{-1} \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) P$$

Exemple 8 Considérons une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs $\varepsilon_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $\varepsilon_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $\varepsilon_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$. Montrer que $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans celle-ci.

Solution. On vérifie que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice demandée est donc $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Matrices équivalentes

Définition 6 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la famille des colonnes de la matrice.

Exemple 9 Déterminer le rang de ...

Proposition 12 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang noté r (on a $r \in [\![0, \min(p,n)]\!]$). Il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F dans laquelle la matrice de f est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r$$

où :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Cette matrice est appelée *matrice canonique de rang r*.

Démonstration D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p - r$ et $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire de dimension r. Considérons une base $\mathscr{B}(e_1, \dots, e_p)$ qui est adaptées à la décomposition $E = G \oplus \mathrm{Ker}(f)$. La famille $(e_1), \dots, e_r)$ est libre dans G et $f|_G$ est injective (puisque $G \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$) donc la famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base $\mathscr{C}$ de F. On vérifie alors que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r$. ■

Définition 7 Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1}AQ$.

Remarques : deux matrices d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$, écrites dans des bases différentes de E et de F sont équivalentes.

Proposition 13 La relation d'équivalence sur les matrices est une relation d'équivalence.

Démonstration facile ■

Proposition 14 Soit $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A et B sont équivalentes

(ii) A et B sont des matrices d'une même application linéaire

(iii) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

Démonstration ⋆ Soit f l'application canoniquement associée à A et notons $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ respectivement. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. Comme B est équivalente à A, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = P^{-1}BQ$. Si on note $\mathscr{C}'$ la famille des colonnes de la matrice P et $\mathscr{B}$ la famille des colonnes de la matrice Q, on a $P = P_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}$ et $Q = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ (on sait que les familles $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ sont des bases de leurs espaces respectifs puisque P et Q sont inversibles). Ainsi :

$$B = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}} \,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$$

ce qui montre que A et B sont les matrices d'une même application linéaire. Ceci démontre l'implication (i)$\Longrightarrow$(ii).

- ⋆ Soit f une application linéaire représentant A et B. Par définition du rang, pour toute base B de l'espace de départ de f, on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(\mathscr{B}))$, d'où l'égalité annoncée par définition du rang d'une matrice.
- ⋆ Supposons que A et B soit de même rang r et notons f et g les applications linéaires canoniquement associées à A et à B respectivement. On a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g) = r$ donc, dans des bases adaptées, f et g admettent pour matrice la matrice J_r. Donc, par changement de base, A est équivalente à B. ■

Corollaire 3 Une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$ si et seulement si elle est équivalente à la matrice J_r (de taille $n \times p$).

Démonstration Cette équivalence provient de la proposition et du fait que $\mathrm{rg}(J_r) = 1$. ■

3) Calcul pratique du rang d'une matrice ou d'une application linéaire

Revenons sur les opérations élémentaires vues dans le chapitre sur les systèmes linéaires et les matrices.

Proposition 15 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- ⋆ Lorsque l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A on ne modifie pas le noyau de A ni le rang de A.
- ⋆ Lorsque l'on effectue des opérations élémentaires sur les colonnes de A, l'image de A et le rang sont inchangés.

Démonstration Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A. Effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible (de transvection, de dilatation ou de permutation). Si A' est la nouvelle matrice, alors A et A' sont équivalentes. Elles ont donc le même rang. ■

Remarque : cette proposition permet de calculer le rang d'une matrice/application linéaire en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.

Exemple 10 Calculer le rang de ...

Proposition 16 Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg}(M^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}(M)$.

Démonstration Notons r le rang de A. Alors A est équivalente à J_r ; il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = P^{-1} J_r Q$, ce qui implique que $A^{\mathrm{T}} = Q^{\mathrm{T}} J_r (P^{\mathrm{T}})^{-1}$ puisque J_r est symétrique. Donc A^{T} est équivalente à J_r, d'où le résultat. ■

4) Matrices extraites

Définition 8 (matrice extraite) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *matrice extraite* de A toute matrice de la forme $A' = (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ où I et J sont des parties non vides de $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, p]\!]$ respectivement.

Remarque : il s'agit de ne conserver qu'un certain nombre de lignes et de colonnes de la matrice initiale. Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont extraites de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'intérêt des matrices extraites réside dans le résultat suivant.

Proposition 17 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$. Alors A est de rang r si et seulement si :

(i) il existe une matrice extraite de A carrée de taille $r \times r$ inversible ;

(ii) et toute matrice extraite de A est de rang au plus r.

Démonstration On raisonne par double implication.

- ⋆ Supposons que (i) et (ii) soient satisfaites. Comme A est extraite de A, on a $\mathrm{rg}(A) \leqslant r$ d'après (ii). Si $C_1, \ldots, C_r$ correspondent aux r colonnes de la matrice A qui ont été retenues pour trouver une matrice extraite de A inversible de taille $r \times r$, on a les inégalités :

$$\mathrm{rg}(A) \geqslant \mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_r) = r$$

donc $\mathrm{rg}(A) = r$.

- ⋆ Réciproquement, supposons que A soit de rang r. On peut trouver une famille libre de r vecteurs colonnes de la matrice A qui soit de rang r (par définition du rang d'une matrice). On peut donc extraire une matrice A' de A de taille $n \times r$ dont les colonnes forment une famille libre de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Or $\mathrm{rg}(A'^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}(A') = r$ donc on peut extraire r lignes de A' formant une famille libre de $\mathbb{K}^r$, d'où le résultat. ■

Exemple 11 $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \geqslant 3$ car la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible

III – Matrices semblables

1) Trace d'une matrice carrée

Définition 9 (trace) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle *trace* de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, le scalaire :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Exemple 12 — $\mathrm{Tr}(I_n) = n$

— $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} = 3$

Les propriétés algébriques de la trace sont les suivantes.

Proposition 18 (i) L'application $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda\,\mathrm{Tr}(B)$$

(ii) Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Tr}(A)$.

(iii) Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'égalité :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

Démonstration Les points (i) et (ii) sont évidents. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(BA)_{k,k}\\ &= \operatorname{Tr}(BA)\end{aligned}$$

■

Proposition/définition 1 Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ (où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie) et $\mathscr{B}$ une base de E. La quantité $\operatorname{Tr}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie dans E. On l'appelle la trace de f et on la note $\operatorname{Tr}(f)$.

Démonstration Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et posons $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $M' = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et encore $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. On sait alors que $M' = P^{-1}MP$ donc, en utilisant l'associativité du produit matriciel et la propriété (iii) du résultat précédent, on a :

$$\operatorname{Tr}(M') = \operatorname{Tr}(P^{-1}(MP)) = \operatorname{Tr}((MP)P^{-1}) = \operatorname{Tr}(M),$$

d'où le résultat. ■

Exemple 13 — $\operatorname{Tr}(\operatorname{Id}_E) = \dim(E)$

— Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de E et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$. En notant k la dimension de $\operatorname{Ker}(p)$, on a :

(i) $\forall i \in [\![1, k]\!],\ p(e_i) = 0$

(ii) $\forall i \in [\![k+1, p]\!],\ p(e_i) = e_i$

donc :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{P}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{p-k}\end{pmatrix}$$

ce qui implique que $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

Remarque : si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on a donc $\operatorname{Tr}(v \circ u) = \operatorname{Tr}(u \circ v)$.

2) Notion de matrices semblables

Définition 10 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables s'il existe $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarques.

- ⋆ Deux matrices (carrées) semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fausse (des matrices carrées équivalentes ne sont pas forcément semblables).
- ⋆ Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Alors :

  $$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P$$

  donc les matrices $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ sont semblables.
- ⋆ On vérifie facilement que la similitude des matrices (carrées de même taille) est une relation d'équivalence.

Proposition 19 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Démonstration Nous l'avons déjà démontré. ■

Remarque : la réciproque est fausse. Les matrice 0_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont la même trace (égale à 0) mais elles ne sont pas semblables (la deuxième matrice n'étant pas nulle).