Intégration

I – Notion de continuité uniforme

Dans tout cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide (autrement dit, I est non vide et non réduit à un point) et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

1) Définition et premières propriétés

Définition 1 (fonction uniformément continue) La fonction f est dite *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x, y \in I, \qquad |x - y| \leqslant \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 1

- ⋆ Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto ax$ est uniformément continue. En effet, à $\varepsilon > 0$ fixé, il suffit de choisir $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{|a|} > 0$ dans la définition.
- ⋆ La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$. En effet :

$$\forall x, y \in [0, 1], \qquad |f(x) - f(y)| = (x + y)|x - y| \leqslant 2|x - y|$$

  Pour $\varepsilon > 0$ fixé dans la définition, il suffit donc de choisir $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$.
- ⋆ Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f n'est pas uniformément continue.
  Par l'absurde, si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, alors il existerait $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant 1$$

  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc :

$$|f(x) - f(x + \delta)| = |(x + \delta)^2 - x^2| = 2\delta x + \delta^2 \leqslant 1,$$

  ce qui est absurde car $2\delta x + \delta^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Remarques :

- ⋆ Dans cette définition, l'une ou l'autre des inégalités strictes peut être remplacée par une inégalité large.
- ⋆ Notons la différence avec la définition de la continuité sur I qui est :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_{\varepsilon,x} > 0,\ \forall y \in I, \qquad |x - y| \leqslant \delta_{\varepsilon,x} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Le lien entre les notions de continuité et d'uniforme continuité est contenu dans la proposition suivante :

Proposition 1 (continue *vs* uniformément continue *vs* lipschitzien) On a :

$$(f \text{ lipschitzienne sur } I) \implies (f \text{ uniformément continue sur } I) \implies (f \text{ continue sur } I)$$

Démonstration ⋆ On suppose que f est uniformément continue sur I. Montrons que f est continue sur I. Soient $x_0 \in I$ et $\delta > 0$. Par uniforme continuité de f sur I, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I, \qquad |x - y| \leqslant \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, comme $x_0 \in I$,

$$\forall y \in I, \qquad |x_0 - y| \leqslant \delta_\varepsilon \implies |f(x_0) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit, f est continue au point x_0. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, on conclut que f est continue sur I.

⋆ Supposons que f soit lipschitzienne sur I. Il existe alors $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $|x - y| \leqslant \delta_\varepsilon$. Comme $M \geqslant 0$, on a :

$$M|x - y| \leqslant M\delta_\varepsilon = \varepsilon$$

et donc :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \leqslant \varepsilon$$

La fonction f est donc uniformément continue sur I. ■

Remarques : les réciproques sont fausses.

⋆ La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas uniformément continue.

⋆ On peut montrer que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas lipschitzienne.

2) Théorème de Heine

Les notions de continuité et d'uniforme continuité sont équivalentes si on travaille sur un *segment*. En effet :

Théorème 1 (de Heine) Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Démonstration (admise en MPSI) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$.

⋆ Par définition de l'uniforme continuité, on a :

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists\, x_\delta, y_\delta \in [a, b],\ |x_\delta - y_\delta| > \delta \text{ et } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que :

$$|x_n - y_n| > \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

⋆ La suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car à valeurs dans $[a, b]$) donc elle admet une suite extraite convergente (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass). Il existe donc une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in [a, b]$ tel que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

⋆ On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leqslant \frac{1}{\varphi(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad (\text{car } \varphi(n+1) \geqslant n+1)$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{\varphi(n)} - \frac{1}{n+1} \leqslant y_{\varphi(n)} \leqslant x_{\varphi(n)} + \frac{1}{n+1}$$

Le théorème des gendarmes implique donc que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

⋆ Par ailleurs, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$$

et f est continue au point ℓ (puisqu'elle est continue sur $[a, b]$). D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a :

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell) \qquad \text{et} \qquad f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $|f(\ell) - f(\ell)| \geqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $\varepsilon \leqslant 0$, ce qui est absurde.

Finalement, f est uniformément continue sur $[a, b]$. ■

II – Intégrale des fonctions en escalier

Dans cette section, a et b désignent deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. Nous commencerons par définir la notion d'intégrale pour une fonction dite *en escalier*.

1) Notion de subdivision de $[a, b]$

Définition 2 (subdivision d'un segment) On appelle *subdivision* du segment $[a, b]$ toute famille de points $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ (où $n \in \mathbb{N}$) telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

On notera $S(a, b)$ l'ensemble des subdivisions du segment $[a, b]$.

Exemple 2 ⋆ $\sigma = \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)$ est une subdivision du segment $[0, 1]$, *i.e.* $\sigma \in S(0, 1)$.

⋆ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *subdivision régulière de rang* n du segment $[a, b]$, notée σ_n, la subdivision :

$$\sigma_n = \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$$

Définition 3 (pas d'une subdivision) Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n) \in S(a, b)$. On appelle *pas* de la subdivision σ la quantité :

$$\mu(\sigma) := \max\{x_{i+1} - x_i \mid i \in [\![0, n-1]\!]\}$$

Exemple 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le pas de la subdivision régulière σ_n est égal à $\mu(\sigma_n) = \dfrac{b-a}{n}$.

2) Notion de fonction en escalier

La notion de subdivision nous permet de définir celle de fonction en escalier.

Définition 4 (fonction en escalier) ⋆ Une fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $\varphi_{|]x_i, x_{i+1}[}$ soit constante.

On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* à la fonction φ.

⋆ On note $\mathscr{E}(a, b)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Exemple 4 La fonction partie entière est en escalier sur l'intervalle $[-1, 3]$ (par exemple) relativement à la subdivision $(-1, 0, 1, 2, 3)$.

Remarques :

⋆ On peut vérifier que le triplet $(\mathscr{E}(a, b), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

⋆ De même, $(\mathscr{E}(a, b), +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

3) Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 5 (intégrale d'une fonction en escalier) Soient $\varphi \in \mathscr{E}(a,b)$ et $\sigma \in S(a,b)$ une subdivision adaptée à φ. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note y_i la valeur de la fonction (constante) $\varphi_{|]x_i,x_{i+1}[}$. On appelle intégrale de φ sur $[a,b]$ le nombre réel noté $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ suivant :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$$

Remarques :

- ⋆ Ce nombre est aussi noté $\displaystyle\int_a^b \varphi$ ou $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
- ⋆ Si $a = b$, on a $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = 0$ (la somme est vide).
- ⋆ Pour montrer que cette définition est cohérente, on justifie que la valeur donnée est indépendante de la subdivision adaptée à φ choisie.
  - ⋆ **Première étape :** soit $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision adaptée à φ (où $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$). Soit encore $x \in [a,b] \setminus \sigma$. Il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_k < x < x_{k+1}$. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, notons y_i la valeur de la fonction constante $\varphi_{]x_i,x_{i+1}[}$. Comme $x_k < x < x_{k+1}$, les fonctions $\varphi_{]x_k,x[}$ et $\varphi_{]x,x_{k+1}[}$ sont constantes égales à y_i. La somme de la définition ci-dessus associée à la subdivision $\sigma' = \{x_0, \dots, x_k, x, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ est donc égale à (en utilisant la relation de Chasles) :

$$\sum_{i=0}^{k-1} y_i(x_{i+1} - x_i) + y_k(x - x_k) + y_k(x_{k+1} - x) + \sum_{i=k+1}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$$

  - ⋆ **Deuxième étape :** par récurrence, en rajoutant un nombre fini de points à une subdivision adaptée à φ, on ne modifie pas la valeur donnée dans la définition.
  - ⋆ **Troisième étape :** si σ et σ' sont deux subdivisions adaptées à φ, alors Σ est une subdivision adaptée à φ contenant tous les points de σ et σ'. En utilisant deux fois le deuxième point, on obtient que les sommes de la définition associées à σ et à σ' sont égale à celle associée à Σ. Finalement, la somme associée à σ est égale à celle associée à σ'.

Géométriquement, l'intégrale d'une fonction en escalier correspond à l'aire (algébrique) délimitée par la courbe de f (en ignorant les discontinuités) et l'axe des abscisses.

✎✎✎ **Exercice 1** Calculer $\displaystyle\int_{[-1,4]} |\cdot|$.

Solution. On considère la subdivision régulière de rang 5 de l'intervalle $[-1,4]$:

$$\int_{-1}^{4} \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}x = \sum_{i=-1}^{3} i(i+1-i) = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

Les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier sont les suivantes.

Proposition 2 (propriétés de l'intégrale) Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{E}(a,b)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- ⋆ $\displaystyle\int_{[a,b]} (\varphi + \lambda\psi) = \int_{[a,b]} \varphi + \lambda \int_{[a,b]} \psi$ (propriété de linéarité de l'intégrale) ;
- ⋆ pour tout $c \in [a,b]$, on a $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$ (relation de Chasles) ;

- ⋆ si $\varphi \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geqslant 0$ (propriété de positivité de l'intégrale) ;
- ⋆ si $\varphi \leqslant \psi$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$ (propriété de croissance de l'intégrale) ;
- ⋆ on a $|\varphi| \in \mathscr{E}(a,b)$ et $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi|$ (inégalité triangulaire).

Démonstration Considérons une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ (où $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$) une subdivision adaptée aux deux fonctions en escalier φ et ψ (il suffit de réunir une subdivision adaptée à φ avec une subdivision adaptée à ψ).

- ⋆ Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, notons y_i et z_i les valeurs prises par les restrictions de φ et ψ à $]x_i, x_{i+1}[$. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $\varphi + \lambda\psi$ est constante sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et prend la valeur $y_i + \lambda z_i$. Donc la fonction $\varphi + \lambda\psi$ est en escalier sur $[a,b]$ et σ est une subdivision adaptée à $\varphi + \lambda\psi$. De plus, par définition de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} (\varphi + \lambda\psi) &= \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + \lambda z_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} z_i(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{(linéarité de la somme)} \\ &= \int_{[a,b]} \varphi + \lambda \int_{[a,b]} \psi\end{aligned}$$

  par définition de l'intégrale de φ et ψ.
- ⋆ Soit $\sigma_1 = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ sur $[a,c]$ et $\sigma_2 = (x_{n+1}, \ldots, x_m)$ une subdivision adaptée à φ sur $[c,b]$. Alors $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision adaptée à φ sur $[a,b]$. Il suffit ensuite d'utiliser la relation de Chasles pour les sommes.
- ⋆ Si $\varphi \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a $y_i \geqslant 0$. Ainsi :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(\underbrace{x_{i+1} - x_i}_{>0}) \geqslant 0 \qquad \text{(somme et produits de nombres positifs)}$$

- ⋆ Supposons que $\varphi \leqslant \psi$. Alors $\eta := \psi - \varphi$ est une fonction en escalier positive sur $[a,b]$. D'après le point précédent, on a $\displaystyle\int_{[a,b]} \eta \geqslant 0$ et la linéarité de l'intégrale permet de conclure.
- ⋆ Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $|\varphi|$ est constante égale à $|y_i|$ sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Donc $|\varphi|$ est en escalier sur $[a,b]$ et σ en est une subdivision adaptée. On utilise ensuite l'inégalité triangulaire pour les sommes :

$$\begin{aligned}\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |y_i(x_{i+1} - x_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} |y_i|\,(x_{i+1} - x_i) \\ &= \int_{[a,b]} |\varphi|\end{aligned}$$

■

III – Intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$.

1) Notion de fonction continue par morceaux

Définition 6 (fonction continue par morceaux) Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe $\sigma = (x_0, \ldots, x_n) \in S(a,b)$ telle que :

- ⋆ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ est continue ;
- ⋆ f admet des limites <u>finies</u> à gauche et à droite aux points $x_1, \ldots, x_{n-1}$;
- ⋆ f admet une limite <u>finie</u> à gauche en b et une limite <u>finie</u> à droite en a.

On note $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Remarques :

- ⋆ Une telle subdivision σ est dite adaptée à la fonction f.
- ⋆ On a les inclusions :

$$\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{E}(a,b) \subset \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b])$$

Exemple 5 ⋆ La fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-10,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \text{ (noté } \{x\}) \end{array} \right.$$

est continue par morceaux.

- ⋆ La fonction :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ car elle n'admet pas de limite à droite en 0.

Remarques :

- ⋆ Le triplet $(\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b]), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.
- ⋆ Le triplet $(\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b]), +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

Définition 7 (fonction continue par morceaux sur un intervalle) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que f est continue par morceaux sur I si elle l'est sur tout segment inclus dans I.

Exemple 6 La fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$$

est continue par morceaux.

Le résultat suivant va nous permettre de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Théorème 2 (densité des fonctions en escalier) Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers $\varphi, \psi \in \mathscr{E}(a,b)$ telles que :

(1) $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$;

(2) $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

On dit que $\mathscr{E}(a,b)$ est *dense* dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b])$.

Démonstration ⋆ **Première étape :** on suppose que f est continue sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$. Il existe donc $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \leqslant \delta_\varepsilon \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Comme $\dfrac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \delta_\varepsilon$. Considérons la subdivision régulière de rang n de $[a,b]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, posons donc $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Notons enfin φ et ψ les fonctions définies sur $[a,b]$ par :

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, \qquad \varphi(x) = \min_{x_i \leqslant x < x_{i+1}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \max_{x_i \leqslant x < x_{i+1}} f(x)$$

et encore $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$. Alors $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ par construction de φ et ψ. Soit $x \in [a,b[$. Il existe $i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x_i \leqslant x < x_{i+1}$. Alors :

$$0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) = \max_{x_i \leqslant x < x_{i+1}} f(x) - \min_{x_i \leqslant x < x_{i+1}} f(x)$$

Comme f est continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$, il existe (d'après le théorème des bornes atteintes) $y_i, z_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tels que :

$$\min_{x_i \leqslant x < x_{i+1}} f(x) = f(y_i) \qquad \text{et} \qquad \max_{x_i \leqslant x < x_{i+1}} f(x) = f(z_i)$$

Or :

$$x_i \leqslant y_i, z_i \leqslant x_{i+1} \qquad \text{donc} \qquad |y_i - z_i| \leqslant |x_{i+1} - x_i| = \frac{b-a}{n} \leqslant \delta_\varepsilon$$

donc, par uniforme continuité de f :

$$\max_{x_i \leqslant x < x_{i+1}} f(x) - \min_{x_i \leqslant x < x_{i+1}} f(x) = f(z_i) - f(y_i) \leqslant \varepsilon$$

L'inégalité est enfin clairement vérifiée pour $x = b$. Les points (1) et (2) sont donc établis.

⋆ **Deuxième étape :** on traite le cas général. Soient $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b])$ et considérons une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ adaptée à f. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $i \in [\![0,n-1]\!]$. La fonction f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1} donc, d'après le point précédent, il existe des fonctions en escalier φ_i et ψ_i sur $[x_i, x_{i+1}]$ telles que pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on ait :

$$\varphi_i(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_i(x) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \psi_i(x) - \varphi_i(x) \leqslant \varepsilon$$

On notera $\tilde{\varphi}_i$ et $\tilde{\psi}_i$ les fonctions qui coïncident avec φ_i et ψ_i respectivement sur $]x_i, x_{i+1}[$ et qui sont égales à $f(x_i)$ en x_i et à $f(x_{i+1})$ en x_{i+1}. Considérons enfin les fonctions φ et ψ définies sur $[a,b]$ par :

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad \varphi(x) = \varphi_i(x) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \psi_i(x)$$

Par construction, les fonctions φ et ψ sont telles sur $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ sur $[a,b]$. ■

2) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

On veut maintenant définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Pour tout $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathbb{R})$, on considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivant :

$$E_-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathscr{E}(a,b),\ \varphi \leqslant f \right\} \quad \text{et} \quad E_+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathscr{E}(a,b),\ \varphi \geqslant f \right\}$$

Lemme 1 Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.

Démonstration Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathbb{R})$. Considérons une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ adaptée à f. Soit $i \in [\![0,n-1]\!]$. La fonction f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et admet une limite à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}. Ainsi, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$. Ce prolongement est alors borné sur $[x_i, x_{i+1}]$ (c'est donc aussi le cas de $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$). Soit donc $M_i \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \qquad |f(x)| \leqslant M_i$$

Alors :

$$M := \max\left(\{M_i \mid i \in [\![0,n-1]\!]\} \cup \{|f(x_i)| \mid i \in [\![0,n]\!]\}\right)$$

est un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$. ■

Proposition 3 Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. Alors :

- ⋆ $E_-(f)$ admet une borne supérieure ;
- ⋆ $E_+(f)$ admet une borne inférieure ;
- ⋆ $\sup(E_-(f)) = \inf(E_+(f))$.

Démonstration ⋆ Les deux ensembles $E_+(f)$ et $E_-(f)$ sont des parties non vides de $\mathbb{R}$. En effet, on sait que f est bornée sur $[a,b]$ d'après le lemme précédent donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, on ait $|f(x)| \leqslant M$. L'ensemble $E_+(f)$ contient donc $M(b-a)$. En effet, la fonction $\varphi_M : x \longmapsto M$ est en escalier sur $[a,b]$ telle que $\varphi_M \geqslant f$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = M(b-a)$. De même, $E_-(f)$ contient $-M(b-a)$.

⋆ Montrons que l'ensemble $E_-(f)$ est majoré. Soit $x \in E_-(f)$. Il existe $\varphi \in \mathscr{E}(a,b)$ tel que $\varphi \leqslant f$ et $x = \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$. Par définition de M, on a $\varphi \leqslant f \leqslant M$ sur $[a,b]$ donc (par croissance de l'intégrale pour les fonctions en escalier φ et $x \longmapsto M$ sur $[a,b]$) :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} M \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x \leqslant M(b-a)$$

Ainsi, l'ensemble $E_-(f)$ est majorée par $M(b-a)$. Comme il est de plus non vide, il admet une borne supérieure (propriété de la borne supérieure). De la même manière, $E_+(f)$ admet une borne inférieure.

⋆ Le même raisonnement que celui mené au point précédent permet d'obtenir que :

$$\forall (x,y) \in E_-(f) \times E_+(f), \qquad x \leqslant y$$

donc $\sup(E_-(f)) \leqslant \inf(E_+(f))$. Il reste à démontrer l'autre inégalité. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathscr{E}(a,b)$ est dense dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$, il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}(a,b)$ tels que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \psi - \varphi \leqslant \frac{1}{n(b-a)}$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escaliers, on a :

$$0 \leqslant \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \frac{1}{n}$$

Or :

$$\int_{[a,b]} \psi \geqslant \inf(E_+(f)) \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \sup(E_-(f))$$

donc :

$$\inf(E_+(f)) - \sup(E_-(f)) \leqslant \frac{1}{n}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient, en faisant tendre n vers $+\infty$, la deuxième inégalité. ■

On peut désormais définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Définition 8 (intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment) Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. On appelle intégrale de f sur le segment $[a,b]$, notée :

$$\int_{[a,b]} f, \qquad \int_a^b f \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

la quantité $\sup(E_-(f))$ (ou $\inf(E_+(f))$).

Remarques :

- ⋆ Soit $f \in \mathscr{E}(a,b)$. Alors il est clair que $\sup(E_-(f)) = \displaystyle\int_{[a,b]} f$. Dans ce cas, les deux définitions de l'intégrale coïncident donc.
- ⋆ *Interprétation géométrique* : l'intégrale de $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ a été définie (par exemple) comme $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sup(E_-(f))$. L'idée est donc d'approcher le graphe par une fonction en escalier tout en restant en-dessous du point de vue des courbes. Cela revient à approcher l'aire sous la courbe représentative de f, par défaut, par des rectangles.

Définition 9 (valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux) Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. On appelle valeur moyenne de f sur le segment $[a,b]$ le nombre réel suivant :

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques.

- ⋆ *Interprétation géométrique :* cette valeur moyenne $\mu(f)$ représente la largeur du rectangle de base le segment $[a,b]$ (*i.e.* de longueur $b-a$) dont l'aire est égale à $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- ⋆ Si m et M désignent les minimum et maximum de f sur $[a,b]$, alors on a les inégalités :

$$m \leqslant \mu(f) \leqslant M$$

3) Propriétés de l'intégrale

On étend, pour les fonctions continues par morceaux, les propriétés de l'intégrale vues précédemment pour les fonctions en escalier.

Proposition 4 (propriétés de l'intégrale pour les fonctions continues par morceaux) Soient $f, g \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. Alors :

- ⋆ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{[a,b]}(f+\lambda g) = \int_{[a,b]} f + \lambda\int_{[a,b]} g$ (linéarité de l'intégrale) ;
- ⋆ si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale) ;
- ⋆ si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$ (croissance de l'intégrale) ;
- ⋆ on a $|f| \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ et $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$ (inégalité triangulaire) ;
- ⋆ pour tout $c \in [a,b]$, on a $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,c],\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([c,b],\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ (relation de Chasles).

Démonstration ⋆ Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par densité des fonctions en escalier sur $[a,b]$ dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$, il existe $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{E}(a,b)$ tels que :

$$\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1, \qquad \varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2, \qquad \psi_1 - \varphi_1 \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \psi_2 - \varphi_2 \leqslant \frac{1}{n}$$

Par définition de l'intégrale de f, g et $f+\lambda g$, on sait que :

$$\inf(E_+(f+\lambda g)) = \int_{[a,b]} (f+\lambda g) \leqslant \int_{[a,b]} (\psi_1 + \lambda\psi_2)$$

tandis que (puisque $\lambda \geqslant 0$) :

$$\sup(E_-(f)) + \lambda \sup(E_-(g)) = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g \geqslant \int_{[a,b]} \varphi_1 + \lambda \int_{[a,b]} \varphi_2$$

Ensuite, par croissance et linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} (f+\lambda g) - \left(\int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g\right) &\leqslant \int_{[a,b]} (\psi_1 + \lambda\psi_2) - \left(\int_{[a,b]} \varphi_1 + \lambda \int_{[a,b]} \varphi_2\right) \\
&= \int_{[a,b]} (\psi_1 - \varphi_1) + \lambda \int_{[a,b]} (\psi_2 - \varphi_2) \\
&\leqslant (b-a)\frac{\lambda+1}{n}
\end{aligned}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} (f+\lambda g) - \left(\int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g\right) &\geqslant \int_{[a,b]} (\varphi_1 + \lambda\varphi_2) - \left(\int_{[a,b]} \psi_1 + \lambda \int_{[a,b]} \psi_2\right) \\
&\leqslant (a-b)\frac{\lambda+1}{n}
\end{aligned}$$

On obtient le résultat souhaité en faisant tendre n vers $+\infty$. On obtient la même conclusion si $\lambda < 0$.

- ⋆ La fonction nulle sur $[a,b]$ est une fonction en escalier minorant f (puisque f est à valeurs positives). Cette fonction appartient donc à $E_-(f)$. Ainsi :

$$\int_{[a,b]} f = \sup(E_-(f)) \geqslant \int_{[a,b]} 0 = 0$$

- ⋆ Par hypothèse, la fonction $g-f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et elle est à valeurs positives. On a donc (d'après la propriété de positivité de l'intégrale) :

$$\int_{[a,b]} (g-f) \geqslant 0$$

d'où l'on tire l'inégalité souhaitée par linéarité de l'intégrale.

- ⋆ On a $f \leqslant |f|$ et $-f \leqslant |f|$ donc (par croissance et linéarité de l'intégrale) :

$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f| \qquad \text{et} \qquad -\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

c'est-à-dire :

$$-\int_{[a,b]} |f| \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

d'où l'on tire l'inégalité annoncée.

- ⋆ Le raisonnement est analogue à celui pour la linéarité de l'intégrale. ■

Remarque : la réciproque de la propriété de positivité de l'intégrale est fausse. Par exemple, $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = 0 \geqslant 0$ bien que $x \longmapsto x$ ne soit pas positive sur $[-1,1]$.

Proposition 5 (théorème de nullité de l'intégrale) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où ici $a < b$) une fonction continue et positive telle que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$. Alors f est la fonction nulle.

Démonstration On raisonne par l'absurde. Supposons que f ne soit pas la fonction nulle. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Par continuité de f au point c, il existe donc $\alpha, \beta \in [a,b]$ tels que $\alpha < \beta$, $c \in [\alpha, \beta]$ et $f \geqslant \dfrac{f(c)}{2}$. Par positivité puis par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_{[a,b]} f = \underbrace{\int_{[a,\alpha]} f}_{\geqslant 0} + \int_{[\alpha,\beta]} f + \underbrace{\int_{[\beta,b]} f}_{\geqslant 0} \geqslant \int_{[\alpha,\beta]} \frac{f(c)}{2} = (\beta - \alpha)\frac{f(c)}{2} > 0, \qquad \blacksquare$$

ce qui est absurde.

Remarques :

- ⋆ Une autre façon d'énoncer la proposition est la suivante : si f est une fonction continue sur $[a,b]$ (où $a < b$), positive et non nulle, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
- ⋆ Ce théorème est faux si on enlève l'une des deux hypothèses :
  — la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ est discontinue positive sur $[0,1]$ d'intégrale nulle ;
  — la fonction identité est d'intégrale nulle sur $[-1,1]$.

4) Notation $\displaystyle\int_b^a f$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. On pose :

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

L'intégrale, dans ce nouveau cadre, vérifie les mêmes propriétés mais il faut faire attention aux signes des inégalités. Par exemple, si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_b^a f \leqslant 0$.

5) Sommes de Riemann

Le théorème ci-dessous est une version séquentielle de la méthode des rectangles.

Théorème 3 (sur les sommes de Riemann) Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. Alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Plus précisément :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Interprétation géométrique : plus n sera grand et plus les rectangles seront « fins » et donc mieux l'intégrale sera approchée par la somme (appelée somme de Riemann) apparaissant dans la proposition.

Démonstration (pour f lipschitzienne) Conformément au programme, on démontrera ce résultat pour une fonction f lipschitzienne sur $[a,b]$. Il existe donc $M > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a,b], \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(t) - f\left(x_k\right)\right)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire pour les sommes puis pour les intégrales. Ainsi :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t - x_k)\,\mathrm{d}t$$

en utilisant l'hypothèse faite sur f (elle est M-lipschitzienne) et la croissance de l'intégrale. Ensuite, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t - x_k)\,\mathrm{d}t &= M\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \qquad \text{(aire d'un triangle rectangle)} \\ &= M\frac{(b-a)^2}{2n^2}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n},$$

ce qu'il fallait établir. ■

Exemple 7 ⋆ Par continuité de $t \longmapsto \cos(\pi t)$ sur $[0, 1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) = \int_0^1 \cos(t\pi)\,\mathrm{d}t = 0$$

⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite des sommes de Riemann de la fonction arctan qui est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On en déduit que cette suite converge de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

IV – Intégrales et primitives

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Rappel : $f \in \mathbb{R}^I$, on appelle *primitive* de f sur I toute fonction $F \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ telle que $F' = f$ sur I.

1) Existence de primitive

Le théorème fondamental de l'Analyse, qui fait le lien entre la notion de primitive et le calcul d'intégrale, assure l'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle.

Théorème 4 (fondamental de l'Analyse) Soit f une fonction continue sur l'intervalle I à valeurs réelles et soit $a \in I$. Alors la fonction :

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Démonstration

- ⋆ Tout d'abord, la fonction F est bien définie car, pour tout $x \in I$, la fonction f est continue (par morceaux) sur le segment d'extrémités a et x.
- ⋆ Soient $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. On veut donc montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon \implies \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leqslant \varepsilon$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in I \setminus \{x_0\}$. Alors :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \right) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'après la relation de Chasles. Comme f est continue en x_0, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall t \in I,\ |t - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ tel que $|x - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0) \right| \\
&= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \frac{1}{|x - x_0|} \int_{[\min(x,x_0),\max(x,x_0)]} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{1}{|x - x_0|} \int_{[\min(x,x_0),\max(x,x_0)]} \varepsilon\,\mathrm{d}t \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. Autrement dit, F est dérivable au point x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Finalement, la fonction F est dérivable sur I de dérivée f. Remarquons de plus que la fonction F s'annule en a.

- ⋆ Si F et G sont deux primitives de f sur I s'annulant en a. Alors les fonctions F et G sont dérivables sur I, de dérivée f. Donc $F - G$ est dérivable sur I et :

$$(F - G)' = f - f = 0$$

Comme I est un intervalle, la fonction $F - G$ est constante sur I. Or $F(a) = G(a) = 0$ donc $(F - G)(a) = 0$. On en déduit que $F = G$. ■

Corollaire 1 (théorème fondamental du calcul intégral) Soient $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue sur I. Pour toute primitive F de f sur I, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \overset{\text{noté}}{=} \Big[F(t) \Big]_a^b$$

Démonstration La fonction $G : x \longmapsto F(x) - F(a)$ est une primitive de f sur I qui s'annule en a. Par unicité de cette primitive, on a d'après le théorème précédent :

$$\forall x \in I, \qquad F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat. ■

Conséquences :

- ⋆ Les primitives de f sont exactement les fonctions de la forme :

$$x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C \qquad (\text{où } C \in \mathbb{R})$$

- ⋆ Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, alors :

$$\forall a, b \in I, \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Quelques méthodes de calcul intégral (rappels)

On rappelle ici les théorèmes d'intégration par partie et de changement de variable. Ceux-ci ont déjà été démontrés.

Théorème 5 (d'intégration par parties) Soient $u, v \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. Pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

où :

$$\big[u(t)v(t)\big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Exemple 8 Déterminons une primitive de la fonction arcsin, qui est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. La primitive F de arcsin sur l'intervalle $[-1, 1]$ s'annulant en 0 est telle que :

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad F(x) = \int_0^x \arcsin(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in]-1, 1[$. Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto \arcsin(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\min(0, x), \max(0, x)]$ de dérivées respectivement $t \longmapsto 1$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On peut donc intégrer par parties sur ce segment et on a :

$$F(x) = \big[t \arcsin(t)\big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = x \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$$

Théorème 6 (de changement de variable) Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}(\varphi(I), \mathbb{R})$. Pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 9 Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \mathrm{e}^x$.

Corollaire 2 Soit $f \in \mathscr{C}([-a,a],\mathbb{R})$ où $a > 0$.

- ⋆ Si f est paire sur $[-a,a]$, alors :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- ⋆ Si f est impaire sur $[-a,a]$, alors :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

- ⋆ Si f est une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ de période $T > 0$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{0}^{nT} f(t)\,\mathrm{d}t = n\int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration Il suffit d'effectuer le changement de variable $x = -t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$. ■

Exemple 10 On a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x)\,\mathrm{d}x = 0$.

V – Formules de Taylor

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Nous avons rencontré deux formules de Taylor : celle concernant les polynômes et la formule de Taylor-Young. Le point commun de celles-ci est qu'elles permettent d'exprimer (ou d'approximer) la valeur d'une fonction en un point a à partir du polynôme de Taylor de la fonction en ce point, à savoir

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(X-a)^k$$

et d'un éventuel reste négligeable.

Nous donnons ici une nouvelle formule de Taylor avec un reste explicite et étudions certaines conséquences de ce résultat.

1) Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 7 (formule de Taylor avec reste intégral) Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) + \int_{a}^{b} \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration On utilise un raisonnement par récurrence. Soit $a, b \in I$. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition :

$$\mathscr{P}_n : \text{« } \forall f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}),\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) + \int_{a}^{b} \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \text{ »}$$

- ⋆ Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, on sait d'après le théorème fondamental de l'arithmétique que :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

L'égalité est donc vraie au rang 0.

- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathscr{P}_n$ soit vraie et soit $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I, \mathbb{R})$. Alors $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique. On a donc l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $f^{(n+1)}$ et $t \longmapsto -\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (car f est de classe $\mathscr{C}^{n+2}$ sur I par hypothèse et car la deuxième fonction est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) de dérivées respectives $f^{(n+2)}$ et $t \longmapsto \dfrac{(b-t)^n}{n\,!}$. D'après le théorème d'intégration par parties, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On obtient alors bien l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Le théorème est donc établi par principe de récurrence simple. ■

Exemple 11 La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à cette fonction et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

2) Inégalité de Taylor-Lagrange

La proposition suivante est une conséquence du théorème de Taylor avec reste intégral.

Proposition 6 (inégalité de Taylor-Lagrange) Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)\,!} \max_{x \in [\min(a,b), \max(a,b)]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Démonstration La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur I et donc en particulier sur le segment $[\min(a,b), \max(a,b)]$, d'où l'existence (dans $\mathbb{R}$) du maximum ci-dessus.
D'après la formule de Taylor avec reste intégral (qui s'applique puisque les hypothèses sont réunies), on a si $a \leqslant b$:

$$\begin{aligned}\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) \right| = \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!}\,\mathrm{d}t \\ &= \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}\end{aligned}$$

Le raisonnement est analogue si $a > b$. ■

Exemple 12 Soit $x \in \mathbb{R}$. En reprenant l'exemple précédent, on a :

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\,!} \max(1, \mathrm{e}^x)$$

et donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite e^x. En effet, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\,!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées.

On déduit de cette inégalité le théorème de Taylor-Young.

Théorème 8 (de Taylor-Young) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!} (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

Démonstration En effet, l'inégalité de Taylor-Young nous donne :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!} (x-a)^k + \mathcal{O}\big((x-a)^{n+1}\big),$$

ce qui implique l'estimation annoncée. ■

VI – Brève extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si les fonctions $\mathrm{Re}(f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux. On définit alors l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ en posant :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Toutes les propriétés vues dans ce chapitre se généralisent aux intégrales de fonctions continues par morceaux à valeurs complexes **SAUF** les propriétés de positivité et de croissance de l'intégrale. Par contre, l'inégalité triangulaire reste vérifiée (on remplace simplement la valeur absolue par le module), tout comme les formules de Taylor.

Exemple 13 $\left| \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant 2\pi$