Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E, F et G désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I – Généralités

1) Définitions

Définition 1 (application linéaire) Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite *linéaire* si :

- ⋆ $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ (f préserve l'addition) ;
- ⋆ $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(y)$ (f préserve la multiplication par un scalaire).

Remarque : comme une telle application est un morphisme de groupes de $(E,+)$ dans $(F,+)$, on a $f(0_E) = 0_F$. Ainsi, une application qui ne vérifie pas cette propriété n'est pas linéaire.

Exemple 1 L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-y+z+2 \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.

En pratique, on peut unifier les deux points de la définition pour montrer qu'une application est linéaire.

Proposition 1 Une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \qquad (f \text{ préserve les combinaisons linéaires})$$

Démonstration ($\Rightarrow$) Si f est linéaire, alors pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2$, on a :

$$f(x+\lambda y) = f(x) + f(\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

en utilisant successivement les deux points de la définition.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si f vérifie cette propriété, alors elle est linéaire (prendre $\lambda = 1_{\mathbb{K}}$ pour le premier point de la définition et $x = 0_E$ pour le second). ■

Exemple 2 Les applications suivantes sont linéaires.

- ⋆ $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+y) \end{array} \right.$
- ⋆ pour tout $a \in \mathbb{K}$, $\varepsilon_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array} \right.$ (morphisme d'évaluation en a)
- ⋆ $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & (u_n - u_0)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$
- ⋆ $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$

- $\star$ $L : \left\{ \begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \end{array} \right.$ où c désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites convergentes.
- $\star$ $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ (application *identité de E*)
- $\star$ $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$ (application *nulle*)

L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.

Remarque : par une récurrence immédiate, on peut montrer que si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, alors pour toute suite presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et pour tout $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, on a :

$$f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i)$$

Terminologie/notations :

- $\star$ On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.
- $\star$ Lorsque $E = F$, on parle d'*endomorphismes de E*, l'ensemble associé est noté $\mathscr{L}(E)$ (au lieu de $\mathscr{L}(E, E)$).
- $\star$ Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective, on dit que f est un *isomorphisme de E vers F*. On note $\mathrm{GL}(E, F)$ l'ensemble correspondant.
- $\star$ Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est bijective, on dit que f est un *automorphisme de E*, l'ensemble correspondant est alors noté $\mathrm{GL}(E)$. On l'appelle le *groupe linéaire de E* et on a :

$$\mathscr{L}(E)^\times = \mathrm{GL}(E)$$

Exemple 3 (homothétie) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *homothétie de E de rapport λ* toute application de la forme :

$$h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array} \right. \qquad \text{(c'est-à-dire } h_\lambda = \lambda\,\mathrm{Id}_E\text{)}$$

On a $h_\lambda \in \mathscr{L}(E)$ (vérification immédiate).

✎✎✎ **Exercice 1** 1. Déterminer les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (autrement dit, expliciter $\mathscr{L}(\mathbb{R})$).

2. De même, déterminer $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

2) Opérations sur les applications linéaires

On peut naturellement munir $\mathscr{L}(E, F)$ de l'addition des applications et de la multiplication par un scalaire. Plus précisément, pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $f + \lambda \cdot g$ est définie par :

$$\forall x \in E, \qquad (f + \lambda \cdot g)(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x) \in F$$

Proposition 2 L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration Il suffit de vérifier que $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F^E. Or, il est clair que $\theta : x \in E \longmapsto 0_F$ est linéaire (exercice) et que $\mathscr{L}(E, F)$ est stable par combinaisons linéaires, d'où le résultat. ■

On dispose aussi des propriétés de stabilité suivantes.

Proposition 3 (composition, réciproque) Soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

(i) $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$;

(ii) si f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.

Démonstration (i) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x,y) \in E^2$. Alors :

$$(g \circ f)(x+\lambda y) = g(f(x+\lambda y) = g(f(x)+\lambda f(y)) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire}$$
$$= g(f(x)) + \lambda g(f(y)) qquad \text{ car } g \text{ est linéaire}$$
$$= (g\circ f)(x) + \lambda (g \circ f)(y)$$

Donc l'application $g \circ f$ est linéaire.

(ii) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(X,Y) \in F^2$. Comme f est bijective de E vers F, il existe un unique couple $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = X$ et $f(y) = Y$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f^{-1}(X+\lambda Y) = f^{-1}(f(x)+\lambda f(y)) &= f^{-1}(f(x+\lambda y)) qquad \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= (f^{-1} \circ f)(x+\lambda y) \\ &= \mathrm{Id}_E(x+\lambda y) \\ &= x + \lambda y \\ &= f^{-1}(X) + \lambda f^{-1}(Y) \end{aligned}$$

Donc f^{-1} est linéaire de F vers E. ■

Corollaire 1 Le triplet $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (en général non commutatif).

Démonstration On vérifie effectivement que $\mathscr{L}(E)$ est un sous-anneau de $(E^E, +, \circ)$. ■

Remarque : l'application

$$B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right.$$

est *bilinéaire*, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des deux variables d'entrée.

✎✎✎ **Exercice 2** Le vérifier.

Définition 2 (itérées d'un endomorphisme) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On définit la suite des itérées de u par récurrence de la manière suivante :

- ⋆ $u^0 = \mathrm{Id}_E$;
- ⋆ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{k+1} = u^k \circ u$.

Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors on définit u^k pour $k \in \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \qquad u^k = (u^{-1})^{-k}$$

Par exemple, $u^3 = u \circ u \circ u$.

Notation : si $(u,v) \in \mathscr{L}(E)$, la composition $u \circ v$ se note aussi uv.

Exemple 4 Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a $h_\lambda \in \mathrm{GL}(E)$ et :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad (h_\lambda)^k = h_{\lambda^k}$$

II – Noyau et image d'une application linéaire

1) Préliminaire : images directe et réciproque

Une application préserve les combinaisons linéaires. Elle préserve également la structure linéaire des espaces vectoriels.

Proposition 4 (image directe/réciproque d'un sous-espace vectoriel) Soient E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F. Alors :

(i) $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F ;

(ii) $f^{-1}(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration (i) Tout d'abord, on a clairement $f(E') \subset F$.

- ⋆ Comme E' est un sous-espace vectoriel de E, on a $0_E \in E'$ et donc (par linéarité de f), $0_F = f(0_E) \in f(E')$.
- ⋆ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(X, Y) \in f(E')^2$. Il existe $(x, y) \in E'^2$ tel que $f(x) = X$ et $f(y) = Y$. La linéarité de f nous donne alors :
$$X + \lambda Y = f(x) + \lambda f(y) = f(x + \lambda y)$$
et comme $x + \lambda y \in E'$ (puisque E' est un sous-espace vectoriel de E), on peut conclure que $X + \lambda Y \in f(E')$.

Ainsi, $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

(ii) On rappelle que :
$$f^{-1}(F') = \left\{x \in E \,\middle|\, f(x) \in F'\right\}$$
Il est clair que $f^{-1}(F') \subset E'$.

- ⋆ Comme $f(0_E) = 0_F \in F'$ (car F' est un sous-espace vectoriel de F) donc $0_E \in f^{-1}(F')$.
- ⋆ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in f^{-1}(F')^2$. Alors, par linéarité de f,
$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \in F'$$
car x et y appartiennent à $f^{-1}(F')$ et car F' est un sous-espace vectoriel de F.

Ainsi, $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Exemple 5 L'ensemble $A = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, P(1) = P(2)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
En effet, $A = \varphi^{-1}(\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ où :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) - P(2) \end{array} \right.$$
est linéaire (vérification immédiate à faire).

2) Image et noyau d'une application linéaire

L'idée est ici d'étudier l'injectivité d'une application linéaire. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $(x, y) \in E^2$, alors (par linéarité de f) :
$$f(x) = f(y) \iff f(x) - f(y) = 0_F \iff f(x - y) = 0_E \iff x - y \text{ est un antécédent de } 0_E \text{ par } f$$
Ainsi, étudier l'injectivité de f semble reposer sur l'étude de $f^{-1}(\{0_E\})$. À suivre...

(a) Définitions

Proposition/définition 1 (noyau) Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

⋆ On appelle *noyau de* f le sous-espace vectoriel de E suivant :

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{x \in E \,\middle|\, f(x) = 0_F\right\}$$

⋆ On appelle *image de* f le sous-espace vectoriel de F suivant :

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in E\right\}$$

Démonstration On a $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\})$ et on sait que $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F. On utilise alors la proposition 4. Pour l'image, on a $\operatorname{Im}(f) = f(E)$ et on utilise encore 4. ■

Exemple 6 — Le noyau de $D : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}\right.$ est $\operatorname{Ker}(D) = \mathbb{R}_0[X]$, son image est $\mathbb{R}[X]$.

— Le noyau de $\varepsilon_a : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array}\right.$ est (X) (idéal engendré par X), son image est $\mathbb{R}$.

✎✎✎ **Exercice 3** Déterminer le noyau et l'image de $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+y) \end{array}\right.$.

(b) Propriétés

L'intérêt du noyau et de l'image réside dans la proposition suivante.

Proposition 5 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

(i) f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$;

(ii) f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

Démonstration (i) On raisonne par double implication.

⋆ Supposons que f soit injective. Pour tout $x \in E$, on a :

$$x \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(x) = 0_F \iff f(x) = f(0_E) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire}$$
$$x = 0_E$$

car f est surjective. On a donc bien $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

⋆ Supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f, on a :

$$0_F = f(x) - f(y) = f(x-y)$$

et donc $x - y \in \operatorname{Ker}(f)$. L'hypothèse entraîne que $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$. Ainsi, f est injective.

(ii) La caractérisation est en fait la définition même de la surjectivité. ■

Exemple 7 Étudions l'injectivité de $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2P - XP' \end{array}\right.$.

Le résultat suivant permet de calculer en pratique l'image d'une application linéaire, dès lors que l'on dispose d'une famille génératrice de E.

Proposition 6 Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E (finie ou infinie) et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_i))_{i\in I}$$

Démonstration Soit $y \in F$. Alors :

$$\begin{aligned}
y \in \mathrm{Im}(f) &\iff \exists\, x \in E,\ y = f(x) \\
&\iff \exists\, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle},\ y = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) \\
&\iff \exists\, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle},\ y = f\sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire} \\
&\iff y \in \mathrm{Vect}(f(x_i))_{i\in I}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée. ■

✎✎✎ **Exercice 4** Calculer l'image de l'application linéaire $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, y-z) \end{array}\right.$. L'application f est-elle surjective ?

Une solution.
Comme $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\big) &= \mathrm{Vect}\big((2,0),(1,1),(0,-1)\big) \\
&= \mathrm{Vect}\big((1,0),(1,1),(0,1)\big) \\
&= \mathrm{Vect}\big((1,0),(0,1)\big) \qquad (\text{car } (1,1) = (1,0)+(0,1)) \\
&= \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

donc l'application f est surjective.

III – Il en faut peu pour connaître une application linéaire

On suppose que E est de dimension finie égale à $p \in \mathbb{N}^*$ et on considère une base $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ de E.

1) Détermination d'une application linéaire

Théorème 1 Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I} \in E^I$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_i)_{i\in I} \in F^I$ une famille quelconque de vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire f de E vers F telle que :

$$\forall i \in I, \qquad f(e_i) = f_i$$

Démonstration On raisonne par analyse-synthèse.

⋆ Soit $x \in E$. En notant e_i^* la forme coordonnée de E selon e_i, on a :

$$x = \sum_{i\in I} e_i^*(x) e_i$$

S'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$, on a par linéarité de f,

$$f(x) = f\left(\sum_{i\in I} e_i^*(x) e_i\right) = \sum_{i\in I} e_i^*(x) f(e_i) = \sum_{i\in I} e_i^*(x) f_i$$

Ainsi, si une telle application linéaire existe, alors celle-ci est uniquement déterminée.

⋆ Considérons l'application $f = \sum_{i\in I} e_i^* f_i : E \longrightarrow F$. Cette application est linéaire car les formes coordonnées le sont. ■

✎✎✎ **Exercice 5** Soient $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (0,1,1)$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$f(e_1) = (1,1), \qquad f(e_2) = (1,-1) \qquad \text{et} \qquad f(e_3) = (2,1)$$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(x,y,z)$.

2) Image d'une base et Truc-jectivité

Proposition 7 (lien entre injectivité/surjectivité et l'image d'une base) On suppose que E possède une base $(e_i)_{i\in I}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

(i) f est surjective si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F ;

(ii) f est injective si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre ;

(iii) f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est une base de F.

Démonstration (i) Comme $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$$

donc f est surjective si et seulement si $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ engendre F.

(ii) On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que f soit injective et montrons que $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille presque nulle telle que :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$$

Comme f est linéaire, on a $f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$ puis, par linéarité de f, on obtient $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$. Or $(e_i)_{i\in I}$ est libre donc :

$$\forall i \in I, \qquad \lambda_i = 0_{\mathbb{K}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que la famille $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ soit libre et montrons que f est injective, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ de coordonnées $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ (famille presque nulle) dans la base $(e_i)_{i\in I}$. On a par linéarité de f :

$$0_F = f\left(\sum_{i\in I} x_i e_i\right) = \sum_{i\in I} x_i f(e_i)$$

L'hypothèse entraîne que pour tout $i \in I$, on a $\lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$, c'est-à-dire $x = 0_E$. Cela montre l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant claire, on a bien $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc f est injective.

(iii) C'est une conséquence immédiate de (i) et (ii). ■

Exemple 8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ une famille de scalaires deux à deux distincts. L'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1),\ldots,P(x_n)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.

En effet :

- ⋆ On vérifie facilement que f est linéaire.
- ⋆ Si $\mathscr{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ est la famille des polynômes de Lagrange associée à $(x_1, \ldots, x_n)$, on sait que $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus, l'image de cette base par f est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ car :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

  Donc f est bijective.

Le résultat suivant est très utile en pratique.

Corollaire 2 (cas particulier de la dimension finie) Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension (finie) et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Démonstration On sait que $\dim(E) = \dim(F)$ (dimensions finies). Alors :

$$f \text{ est injective} \iff f(\mathscr{B}) \text{ est libre} \iff f(\mathscr{B}) \text{ est génératrice de } F$$

car la famille $f(\mathscr{B})$ est de cardinal $\dim(E) = \dim(F)$. Ainsi, f est injective si et seulement si f est surjective (si et seulement si f est bijective). d'où le résultat. ■

Exemple 9 1. L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, -x+y, z) \end{array} \right.$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. L'application $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & & XP' + P(0) \end{array} \right.$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Corollaire 3 On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathrm{GL}(E)$;

(ii) f est inversible à gauche ($i.e.$: $\exists\, g \in \mathscr{L}(E),\ g \circ f = \mathrm{Id}_E$) ;

(iii) f est inversible à droite ($i.e.$: $\exists\, g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = \mathrm{Id}_E$).

Démonstration On démontre que (i) $\iff$ (ii) (la démonstration de (i) $\iff$ (iii) étant analogue). Tout d'abord, on a clairement (i)$\Longrightarrow$(ii). Supposons maintenant que f soit inversible à gauche, c'est-à-dire qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On montre facilement que f est injective et comme E est de dimension finie, f est bijective, ce qu'il fallait démontrer. ■

3) Espaces isomorphes

Définition 3 (espaces vectoriels isomorphes) Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On s'intéresse uniquement aux espaces de dimension finie.

Proposition 8 (caractérisation des espaces isomorphes en dimension finie) Si E et F sont de dimension finie, alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration ⋆ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathrm{GL}(E, F)$. Alors :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$$

⋆ Réciproquement, supposons que E et F soient de même dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ deux bases de E et F respectivement. On sait qu'il existe une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad f(e_i) = f_i$$

L'application f est un isomorphisme de E sur F (puisqu'elle envoie une base de E sur une base de F). ■

Le résultat précédent montre donc qu'il n'existe qu'un unique $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, à isomorphisme près.

Corollaire 4 Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente puisque E et $\mathbb{K}^n$ sont de même dimension finie. ■

Exemple 10 — L'espace $\mathbb{K}_n[X]$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{n+1}$.
— L'espace $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{np}$.

4) Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

On sait que $(\mathscr{L}(E, F), +, \cdot)$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 2 On suppose que E et F sont de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à :

$$\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Démonstration Si $E = \{0_E\}$, alors $\mathscr{L}(E, F) = \left\{0_{\mathscr{L}(E,F)}\right\}$ donc la formule annoncée est vraie.
Supposons que maintenant $\dim(E) \neq 0$. Considérons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On vérifie facilement que :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & F^n \\ f & \longmapsto & (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \end{array} \right.$$

est une application linéaire. De plus, on sait que :

$$\forall (f_1, \ldots, f_n) \in F^n,\ \exists!\, f \in \mathscr{L}(E, F), \qquad \varphi(f) = (f_1, \ldots, f_n)$$

Autrement dit, φ est une application linéaire bijective de $\mathscr{L}(E, F)$ dans F^n. Donc on a aussi $\varphi^{-1} \in \mathrm{GL}(F^n, \mathscr{L}(E, F))$.
L'espace vectoriel produit F^n est de dimension finie (car F l'est) donc, si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F^n, la famille $(\varphi^{-1}(f_1), \ldots, \varphi^{-1}(f_p))$ est une base de $\mathscr{L}(E, F)$. Donc cet espace est de dimension finie.
Puisque φ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E, F)$ sur F^n, ces espaces sont de même dimension. Ainsi :

$$\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(F^n) = n \dim(F) = \dim(E) \times \dim(F)$$

$$\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(F^n) = n \dim(F) = \dim(E) \times \dim(F)$$

5) Détermination d'une application linéaire sur une somme directe

On définit ici une application linéaire, non pas par l'image d'une base, mais par ses restrictions sur deux sous-espaces vectoriels de E.

Théorème 3 On suppose que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$. Il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que :

$$f|_{E_1} = f_1 \qquad \text{et} \qquad f|_{E_2} = f_2$$

Démonstration On sait par hypothèse que $E = E_1 \oplus E_2$ donc tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2. On raisonne par analyse-synthèse.

- ⋆ **Analyse :** soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$. Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$ et alors, par linéarité de f,

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

  L'application f est donc uniquement déterminée.
- ⋆ **Synthèse :** considérons l'application f telle que, pour tout $x = x_1 + x_2$, $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. L'application f est clairement à valeurs dans F. Ensuite :
  - — Pour tout $x \in E_1$, on a :
$$f(x_1) = f(x_1 + 0_E) = f_1(x_1) + f_2(0_E) = f_1(x_1)$$
    donc $f|_{E_1} = f_1$. De la même manière, on a $f|_{E_2} = f_2$.
  - — Montrons maintenant que f est linéaire. Soit $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ deux vecteurs de E et $\lambda \in \mathbb{K}$ (où $(x_1, y_1) \in E_1^2$ et $(x_2, y_2) \in E_2^2$). Alors :
$$x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2)$$
    donc, par définition de f puis par linéarité de u_1 et u_2,
$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= u_1(x_1 + \lambda y_1) + u_2(x_2 + \lambda y_2) \\ &= u_1(x_1) + \lambda u_1(y_1) + u_2(x_2) + \lambda u_2(y_2) \\ &= (u_1(x_1) + u_2(x_2)) + \lambda(u_1(y_1) + u_2(y_2)) \\ &= u(x) + \lambda u(y) \end{aligned}$$
■

Exemple 11 On sait que $\mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_2[X] \oplus \text{Vect}(X^3)$. Il existe un unique endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi(X^3) = X$. Déterminons l'expression analytique de φ.

IV – Rang d'une application linéaire

1) Définition

Définition 4 (rang) Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $\text{Im}(f)$ soit de dimension finie. On appelle *rang de f*, noté $\text{rg}(f)$, la dimension de l'espace vectoriel $\text{Im}(f)$. Ainsi :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Remarques :

- ⋆ D'après la proposition précédente (sur le calcul pratique de l'image), pour toute famille génératrice $\mathscr{G}$ de E, on a :
$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f(\mathscr{G}))$$
- ⋆ Le rang est toujours bien défini si F est de dimension finie.

2) Propriétés

Le rang permet caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.

Proposition 9 On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On a les équivalences suivantes :

(i) $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$;

(ii) f est injective $\iff \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$;

(iii) f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$;

(iv) f est bijective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

(i) On a :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$$

puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. La famille $f(\mathscr{B})$ est composée de $\dim(E)$ vecteurs donc l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(f(\mathscr{B}) = \mathrm{Im}(f)$ est de dimension au plus $\dim(E)$, d'où l'inégalité attendue.

(ii) Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) = \dim(E) &\iff \mathrm{rg}(f(\mathscr{B})) = \dim(E) \\ &\iff \text{la famille } f(\mathscr{B}) \text{ est libre} \end{aligned}$$

car cette famille comporte $\dim(E)$ vecteurs.

(iii) Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) = \dim(F) \iff \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) &\iff \mathrm{Im}(f) = F \\ &\iff f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

(iv) C'est une conséquence de (ii) et (iii). ■

✎✎✎ **Exercice 6** Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, x+y) \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & 2\,\mathrm{P} - X\,\mathrm{P}' \end{array} \right.$

Une solution.

1. Une base de $\mathbb{R}^2$ est $\big((1,0),(0,1)\big)$ donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(1,0), f(0,1)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,0,1),(0,1,1)\big)$$

Les vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.

2. Une base de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$ donc :

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(1), g(X), g(X^2)) = \mathrm{Vect}(2, X, 0_{\mathbb{R}_2[X]}) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$$

donc $\mathrm{rg}(g) = 2$.

3) Rang d'une composition

Proposition 10 (rang d'une composée) Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, où E, F et G sont de dimension finie. Alors :

(i) $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$;

(ii) si $u \in \mathrm{GL}(E,F)$ (respectivement $v \in \mathrm{GL}(F,G)$), alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$ (respectivement $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$).

Démonstration (i) Il s'agit de montrer que $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$ et $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.

— Comme $u(E) \subset F$, on a $(v \circ u)(E) \subset v(F)$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$. En prenant les dimensions, on obtient $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.

— On sait que :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u(\mathscr{B})) = \mathrm{rg}(u)$$

si $\mathscr{B}$ est une base de E. ■

(ii) Supposons que v soit bijective de F vers G. L'application $\tilde{v} : u(E) \longrightarrow G$ est linéaire et injective (car ces propriétés sont conservées si on restreint une application à un sous-espace) donc :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(\tilde{v}) = \dim(u(E)) = \mathrm{rg}(u)$$

Supposons maintenant que u soit bijective de E vers F. Alors $u(\mathscr{B}$ est une base de F (notons la $\mathscr{C}$). Par définition du rang, on a donc :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v(\mathscr{C})) = \mathrm{rg}(v)$$

4) Le théorème du rang

Le théorème qui suit fait le lien entre le noyau et l'image d'une application linéaire.

Théorème 4 (forme géométrique du théorème du rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si $\mathrm{Ker}(f)$ possède un supplémentaire S dans E, alors $f|_S : S \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration Comme f est linéaire, la restriction de f à S est linéaire ; de plus, cette application est clairement à valeurs dans $\mathrm{Im}(f)$.

⋆ **Injectivité :** comme S et $\mathrm{Ker}(f)$ sont en somme directe, on a :

$$\mathrm{Ker}(f|_I) = S \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

⋆ **Surjectivité :** soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Il existe (un unique couple) $(s,k) \in S \times \mathrm{Ker}(f)$ tel que $x = s + k$ et, par linéarité de f,

$$y = f(x) = f(s) + f(k) = f(s) + 0_F = f(s) = f|_S(s)$$

donc s est un antécédent de y par l'application $f|_I$. ■

Une conséquence directe est la formule du rang.

Corollaire 5 (formule du rang) On suppose que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

Remarque : le fait que E soit de dimension finie entraîne que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimensions finies.

Démonstration Comme E est de dimension finie, $\mathrm{Ker}(f)$ possède un supplémentaire S dans E. D'après le théorème du rang, la restriction $f|_S : S \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On a donc $\dim(S) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Comme $\dim(E) = \dim(S) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$, on en déduit le résultat annoncé. ■

✎✎✎ **Exercice 7** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^2) \leqslant \dim(E)$$

Une solution.
L'égalité $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ entraîne que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et donc, en particulier, $\mathrm{rg}(f^2) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$. On conclut alors en appliquant le théorème du rang à f.

V – Projecteurs et symétries

On étudie ici deux types d'endomorphismes particuliers d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(a) Projecteurs

Définition 5 (projecteur) Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. On dit que p est un *projecteur de* E si :

$$p \circ p = p \qquad \text{(c'est-à-dire si } p^2 = p\text{)}$$

Exemple 12 — L'application Id_E est un projecteur de E.
- — L'application $p : (x, y) \in \mathbb{K}^2 \longmapsto (x, 0)$ est un projecteur de $\mathbb{K}^2$.
- — Plus généralement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application :

$$\pi_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \end{array} \right.$$

  est un projecteur de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 11 (projecteur et supplémentarité) Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors p est un projecteur sur E si et seulement s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que :
- (i) $\forall x \in F,\ p(x) = x$;
- (ii) $\forall x \in G,\ p(x) = 0_E$.

Dans ce cas, les sous-espaces F et G sont uniquement déterminés :

$$F = \mathrm{Im}(p) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Ker}(p)$$

Démonstration Commençons par montrer l'équivalence en raisonnant par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons que p soit un projecteur de E. Posons :

$$G = \mathrm{Ker}(p) \qquad \mathrm{F} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \left\{ x \in E \,\middle|\, p(x) = x \right\}$$

Par construction, F et G vérifient clairement les propriétés (i) et (ii). Il reste à montrer que $E = F \oplus G$.
- — Soit $x \in F \cap G$, alors $p(x) = x = 0_E$ donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant claire (puisque $F \cap G$ a une structure d'espace vectoriel), on a $F \cap G = \{0_E\}$.
- — Montrons maintenant que $E = F + G$. L'inclusion $F + G \subset E$ étant claire, il suffit de montrer que $E \subset F + G$. Soit $z \in E$. On décompose z sous la forme :

$$z = (z - p(z)) + p(z)$$

  Comme p est un projecteur, $p(p(z)) = p(z)$ donc $p(z) \in G$. De plus, par linéarité de p,

$$p(z - p(z)) = p(z) - p(p(z)) = p(z) - p(z) = 0_E$$

  donc $z - p(z) \in F$. Ainsi, $E \subset F + G$, d'où l'égalité annoncée.

On peut donc conclure que $E = F \oplus G$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G dans E vérifiant les propriétés (i) et (ii). Soit $z \in E$. Il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. Par linéarité de p, on a :

$$p^2(z) = p(p(z)) = p(p(x) + p(y)) = p(x + 0_E) = p(x) = x$$

d'après (i) et (ii). Donc p est un projecteur de E.

Supposons que p soit un projecteur de E associé à la décomposition $E = F \oplus G$ vérifiant (i) et (ii). Caractérisons F et G. Soit $z \in E$. Il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. Alors :

$$\begin{aligned} z \in \operatorname{Ker}(p) &\iff p(z) = 0_E \iff p(x + y) = 0_E \\ &\iff p(x) + p(y) = 0_E \\ &\iff x + 0_E = 0_E \\ &\iff x = 0_E \\ &\iff z = y \in G \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(p) = G$. De la même manière, on trouve que $F = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$. ■

Vocabulaire : on dit que p est *le projecteur sur F parallèlement à G*.

Corollaire 6 Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Alors :

(i) $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - p)$;

(ii) $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.

Démonstration (i) Comme p est un projecteur, on a la décomposition $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - p)$ donc, pour tout $z \in E$, on a :

$$\begin{aligned} z \in \operatorname{Im}(p) &\iff \exists\,(x, y) \in F \times F \; z = p(x + y) \\ &\iff \exists\,(x, y) \in F \times F \; z = p(x) + p(y) \\ &\iff \exists\,(x, y) \in F \times F \; z = y \\ &\iff z \in \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E), \end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée.

(ii) découle de (i) et de la proposition précédente. ■

Remarque : si $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur et est bijectif, alors $\operatorname{Ker}(p) = \{0_E\}$ et $E = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - p)$ donc $p = \operatorname{Id}_E$.

✎✎✎ **Exercice 8** Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (0, 1)$. Déterminer le projecteur p de $\mathbb{K}^2$ sur $\mathscr{D}_u$ parallèlement à $\mathscr{D}_v$.

Une solution.

- ⋆ Tout d'abord, on a bien $\mathbb{K}^2 = \mathscr{D}_u \oplus \mathscr{D}_v$ (car la somme des dimension est égale à $2 = \dim(\mathbb{K}^2)$ et car l'intersection des deux droites est égale à $\{0_{\mathbb{K}^2}\}$).
- ⋆ Soit $(x, y) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1) = xu + (y - x)v$$

donc $p(x, y) = xu$.

(b) Symétries

Définition 6 (symétrie) Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. On dit que s est une *symétrie* si :

$$s \circ s = \operatorname{Id}_E \qquad \text{(c'est-à-dire si } s^2 = \operatorname{Id}_E\text{)}$$

Remarque : une symétrie $s \in \mathscr{L}(E)$ est donc un automorphisme de E tel que $s^{-1} = s$.

Exemple 13 Les applications $\pm \operatorname{Id}_E$ sont des symétries.

Proposition 12 Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement s'il existe des sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que :

(i) $\forall x \in F,\ s(x) = x$;

(ii) $\forall x \in G,\ s(x) = -x$.

Dans ce cas, les sous-espaces F et G sont uniquement déterminés :

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Ker}(p + \mathrm{Id}_E)$$

Démonstration On commence par démontrer l'équivalence.

($\Rightarrow$) Supposons que s est une symétrie et posons :

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$

Par construction, F et G vérifient clairement les points (i) et (ii). Vérifions maintenant que $E = F \oplus G$.

— Soit $x \in F \cap G$. Alors $s(x) = x = -x$ donc $2x = 0_E$ et, comme $2 \neq 0_{\mathbb{K}}$, on a bien $x = 0_E$. On a bien $F \cap G = \{0_E\}$ (la deuxième inclusion étant immédiate).

— Montrons que $E = F + G$ (il suffit de montrer que $E \subset F + G$ puisque l'autre inclusion est évidente). Soit $x \in E$. On peut écrire que :

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2} \in F + G,$$

d'où le résultat.

($\Leftarrow$) Supposons l'existence de deux sous-espaces supplémentaires F et G dans E vérifiant (i) et (ii). Soit $z \in E$. Il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. Par linéarité de s, on a :

$$s^2(z) = s(s(z)) = s(s(x) + s(y)) = s(x - y) = s(x) - s(y) = x - (-y) = x + y = z$$

donc $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Autrement dit, s est une symétrie.

On établit maintenant la caractérisation de F et de G. Soit $z \in E$. Il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. Alors :

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \iff s(z) = z &\iff s(x) + s(y) = x + y \\ &\iff x - y = x + y \\ &\iff y = 0_E \\ &\iff z = x \\ &\iff z \in F \end{aligned}$$

On a donc bien $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. On montre l'autre égalité de la même manière. ■

Vocabulaire : on dit que s est la *symétrie par rapport à F parallèlement à G*.

Exemple 14 La symétrie $s \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ par rapport à $F = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$ est définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \qquad s(x, y) = x(1,1) - (y - x)(0,1) = (x, 2x - y)$$

VI – Formes linéaires et hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.

1) Formes linéaires

Définition 7 (forme linéaire) On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque : l'ensemble des formes linéaires sur E est souvent noté E^* (au lieu de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$).

Exemple 15 — $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-2y \end{array} \right.$

— $\mathrm{Tr} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \end{array} \right.$

— $\varepsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array} \right.$

Proposition 13 Soit $\varphi \in E^*$. Alors φ est surjective si et seulement si $\varphi \neq 0_{E^*}$.

Démonstration ($\Rightarrow$) Si φ est surjective, alors il existe en particulier $x \in E$ tel que $\varphi(x) = 1_{\mathbb{K}}$. Comme $\varphi(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$, l'application φ n'est pas nulle.

($\Leftarrow$) Supposons que $\varphi \neq 0_{E^*}$. Il existe alors $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\varphi\left(\frac{\lambda}{\varphi(x)} x\right) = \frac{\lambda}{\varphi(x)} \varphi(x) = \lambda$$

donc φ est surjective. ■

Remarque : comme $\dim(\mathbb{K}) = 1$, une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$ est injective si et seulement si E est de dimension finie égale à 1 (ce qui est rarement le cas en pratique).

2) Formes linéaires coordonnées

Dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ de E.

Définition 8 (forme coordonnée) Soit $i \in I$. On appelle i^{e} *forme coordonnée* sur E l'unique forme linéaire sur E telle que :

$$\forall j \in I, \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

Remarque : l'existence et l'unicité de e_i^* découle directement du résultat sur la détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.

On dispose des propriétés importantes suivantes.

Proposition 14 (base duale) (i) Pour tout $x \in E$, on a l'égalité suivante :

$$x = \sum_{i\in I} e_i^*(x) e_i$$

(ii) La famille $\mathscr{B}^* = (e_i^*)_{i\in I}$ est une base de E^*. On l'appelle la *base duale de* $\mathscr{B}$.

Démonstration (i) Soit $x \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E. Il existe une (unique) famille presque nulle de scalaires $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k\in I} x_k e_k$. Par linéarité de e_i^*, il vient :

$$e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{k\in I} x_k e_k\right) = \sum_{k\in I} x_k e_i^*(e_k) = \sum_{k\in I} x_k \delta_{i,k} = x_i,$$

d'où l'égalité annoncée.

(ii) Montrons que la famille $\mathscr{B}^*$ est libre et génératrice de E^*.

— Montrons que $\mathscr{B}^*$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille presque nulle telle que $\sum_{k\in I} \lambda_k e_k^* = 0_{E^*}$. Alors, pour tout $i \in I$, on a :

$$0_{\mathbb{K}} = \left(\sum_{k\in I} \lambda_k e_k^*\right)(e_i) = \sum_{k\in I} \lambda_k \underbrace{e_k^*(e_i)}_{=\delta_{i,k}} = \lambda_k,$$

d'où la liberté de $\mathscr{B}^*$.

— Soit $\varphi \in E^*$. Pour tout $x \in E$, on a par linéarité de φ :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k\in I} e_k^*(x) e_k\right) = \sum_{k\in I} \varphi(e_k) e_k^*(x)$$

Autrement dit :

$$\varphi = \sum_{k\in I} \underbrace{\varphi(e_k)}_{\in\mathbb{K}} e_k^* \in \mathrm{Vect}(e_i^*)_{i\in I}$$

La famille $\mathscr{B}$ est donc génératrice de E^*.

Finalement, $\mathscr{B}^*$ est une base de E^*. ■

Exemple 16 ⋆ La base duale de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad e_i^*(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

⋆ La famille $\mathscr{B} = \big((1,1),(0,1)\big)$ est clairement une base de $\mathbb{K}^2$. Sa base duale est la famille (φ, ψ) telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \qquad \varphi(x,y) = x \qquad \text{et} \qquad \psi(x,y) = y - x$$

⋆ Soient $x_0, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Les polynômes de Lagrange associés sont définis par :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad L_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \in \mathbb{K}_n[X]$$

On sait que la famille $(L_0 \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Sa base duale $(L_0^*, \dots, L_n^*)$ est telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![0, n]\!]^2, \qquad L_i^*(L_j) = \delta_{i,j}$$

Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on sait $P = \sum_{j=0}^{n} P(x_j) L_j$ d'où l'on tire, en prenant l'image par L_i^*, que $L_i^*(P) = P(x_i)$. Autrement dit, L_i^* est le morphisme d'évaluation en x_i.

Remarque : si E est de dimension finie, alors E^* est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(E^*)$. Les espaces E et E^* sont donc isomorphes.

3) Hyperplans

Définition 9 (hyperplan) Soit H un sous-espace vectoriel de E.

⋆ On dit que H est un *hyperplan de* E s'il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ tel que :

$$H = \mathrm{Ker}(\varphi)$$

⋆ L'équation $\varphi(x) = 0$ est appelée *équation de l'hyperplan.*

Exemple 17 1. Dans $\mathbb{R}^3$, le plan vectoriel d'équation $x - y - z = 0$ est un hyperplan. Il s'agit en effet du noyau de la forme linéaire :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - y - z \end{array} \right.$$

Elle est non nulle car, par exemple, $\varphi(1, 0, 0) = 1 \neq 0$.

2. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble :

$$H = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} = 0 \right\}$$

est un hyperplan car il s'agit du noyau de la trace (qui est bien une forme linéaire non nulle).

Proposition 15 Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors :

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff \exists\, u \in E \setminus H,\ E = H \oplus \mathscr{D}_u$$

Démonstration ($\Rightarrow$) Soient H un hyperplan de E et $u \in E \setminus H$. Il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ tel que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrons que $E = H \oplus \mathscr{D}_u$.

— Soit $x \in H \cap \mathscr{D}_u$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda u$. Comme $x \in H$, on a $\varphi(x) = \lambda\varphi(u) = 0_{\mathbb{K}}$. Mais $u \notin H$ et $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ donc $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$. On en déduit que $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ et donc $x = 0_E$. Ainsi, $H \cap \mathscr{D}_u = \{0_E\}$.

— Montrons maintenant que $E = H + \mathscr{D}_u$. Soit $x \in E$. Alors :

$$x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u \right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u \in H + \mathscr{D}_u,$$

d'où l'égalité annoncée.

Ainsi, $E = H \oplus \mathscr{D}_u$.

($\Leftarrow$) Soient $u \in E \setminus H$. Alors $E = H \oplus \mathscr{D}_u$. Montrons que H est un hyperplan de E. Il s'agit de montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Considérons les deux applications :

$$\varphi_H : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & 0_{\mathbb{K}} \end{array} \right. \qquad \text{(linéaire)}$$

et $\varphi_u : \mathscr{D}_u \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire telle que $\varphi_u(u) = 1$. On sait alors qu'il existe une unique forme linéaire φ sur E telle que $\varphi|_H = \varphi_H$ et $\varphi|_{\mathscr{D}_u} = \varphi_u$. En particulier, on a $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$ donc H est un hyperplan de E. ∎

Remarque : il n'existe pas d'hyperplan de $\{0_E\}$ puisqu'une forme linéaire $\varphi : \{0_E\} \longrightarrow \mathbb{K}$ est nécessairement nulle.

Proposition 16 (hyperplans en dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$.

Démonstration ⋆ Soit H un hyperplan de E ; il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Le théorème du rang s'applique puisque E est de dimension finie et on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n - \dim(\mathbb{K}) = n - 1$$

puisque φ est surjective (en tant que forme linéaire non nulle).

⋆ Soit $u \in E \setminus H$. D'après la formule de Grassmann (qui s'applique puisque E est de dimension finie), on a :

$$\dim(H + \mathscr{D}_u) = \dim(H) + \dim(\mathscr{D}_u) - \dim(H \cap \mathscr{D}_u) = n - \dim(H \cap \mathscr{D}_u)$$

Or $H \cap \mathscr{D}_u = \{0_E\}$ (car cette intersection est de dimension 0 ou 1 et elle est égale à 1 si et seulement si $\mathscr{D}_u \subset H$, ce qui n'est pas le cas). Ainsi :

$$\dim(H + \mathscr{D}_u) = n = \dim(E)$$

Par ailleurs, on sait que $H \cap \mathscr{D}_u = \{0_E\}$ donc $E = H \oplus \mathscr{D}_u$. La proposition précédente entraîne donc que H est un hyperplan de E. ∎

Exemple 18 L'ensemble $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + 2z - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $4-1=3$ de $\mathbb{R}^4$ (en tant qu'hyperplan de $\mathbb{R}^4$).

Proposition 17 (comparaison des équations d'un hyperplan) Soient H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E telles que :

$$H = \operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi)$$

Alors :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \qquad \psi = \lambda\varphi$$

Démonstration Comme H est un hyperplan de E, on sait qu'il existe $u \in E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$. La forme linéaire $\varphi(u)\psi - \psi(u)\varphi$ est nulle sur H (par définition de φ et ψ) et on remarque qu'elle est nulle en u, donc aussi sur $\mathscr{D}_u$. Par linéarité de cette forme linéaire, elle est nulle sur E. Comme $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$, on conclut que :

$$\psi = \underbrace{\frac{\psi(v)}{\varphi(v)}}_{=\lambda\in\mathbb{K}}\varphi,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque : autrement dit, il existe une unique équation pour un hyperplan, à multiplication par un scalaire non nul près. Par exemple, si on considère l'hyperplan H de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y - z = 0$, alors H admet aussi pour équation $\lambda x - \lambda y - \lambda z = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et il n'existe pas d'autre équation pour H.

Proposition 18 (intersection d'hyperplans) On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in [\![1, n]\!]$.

(i) L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins $n - r$.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E.

Démonstration (i) Soient $H_1, \dots, H_r$ des hyperplans de E. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, il existe une forme linéaire non nulle φ_k de E telle que $H_k = \operatorname{Ker}(\varphi_k)$. Considérons alors l'application :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ x & \longmapsto & \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)\big) \end{array} \right.$$

Celle-ci est linéaire et telle que $\operatorname{Ker}(\Phi) = H_1 \cap \dots \cap H_r$. Comme E est de dimension finie, le théorème du rang nous donne :

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_r) = \dim(E) - \operatorname{rg}(\Phi) \geqslant \dim(E) - \dim(\mathbb{K}^r) = n - r$$

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$. Considérons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dont les $n - r$ derniers vecteurs forment une base de F (une telle base existe puis F d'après le théorème de la base incomplète). Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in F \iff x \in \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n) &\iff e_1^*(x) = \dots = e_r^*(x) = 0 \\ &\iff x \in \operatorname{Ker}(e_1^*) \cap \dots \cap \operatorname{Ker}(e_r^*) \end{aligned}$$

Ainsi, $f = \operatorname{Ker}(e_1^*) \cap \dots \cap \operatorname{Ker}(e_r^*)$. Les formes linéaires $e_1^*, \dots, e_r^*$ sont non nulles donc leurs noyaux sont des hyperplans de E. Ainsi, F est l'intersection de r hyperplans de E, ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple 19 Dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux plans vectoriels, dont les équations ne sont pas proportionnelles, est une droite vectorielle.
parler aussi des droites de $\mathbb{R}^3$
parler des droites dans $\mathbb{R}^2$
système d'équations d'un sous-espace vectoriel

VII – Notion de sous-espace affine

1) Sous-espaces affines d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Dans un espace vectoriel, on ne fait pas la distinction entre un point et un vecteur. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, le point $A(1,1,1)$ est associé au vecteur $\vec{u} = (1,1,1)$ (d'origine $O(0,0,0)$ et d'extrémité A).
La notion d'espace affine permet de différencier deux types d'objets : les points et les vecteurs (dans un espace vectoriel, on confondait les deux notions).

Notation : dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$, si A et B sont deux points du plan ou de l'espace, on écrira :

$$B = A + \vec{u}$$

pour dire que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Cette égalité « affine » signifie que le point B s'obtient à partir du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Définition 10 (translation) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \in E$ (vu comme un point) et $\vec{u} \in E$ (vu comme vecteur). On appelle **translation** associée à $\vec{u}$ l'application :

$$t_{\vec{u}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A + \vec{u} \end{array} \right.$$

Exemple 20 translation de vecteur $\vec{u}$ dans $\mathbb{R}^2$

Définition 11 (sous-espace affine d'un espace vectoriel) Soient F un sous-espace vectoriel de E et $A \in E$. On appelle *sous-espace affine de direction F passant par A* l'ensemble :

$$A + \vec{F} = \left\{ A + \vec{u} \,\middle|\, \vec{u} \in \vec{F} \right\}$$

Remarques.

- ⋆ On a donc :
$$A + \vec{F} = \left\{ t_{\vec{u}}(A) \,\middle|\, \vec{u} \in \vec{F} \right\}$$
- ⋆ Un sous-espace affine est donc déterminé par une origine (le point A) et d'un espace vectoriel ($\vec{F}$).
- ⋆ Un sous-espace affine dirigé par une droite (respectivement un plan, un hyperplan) est appelé droite (respectivement plan, hyperplan) affine.
- ⋆ On appelle dimension d'un sous-espace affine la dimension de sa dimension.

Exemple 21
1. Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ sont les singletons (la direction est $\{(0,0)\}$), les droites affines et $\mathbb{R}^2$.
2. Ceux de $\mathbb{R}^3$ sont les singletons, les droites affines, les plans affines, et $\mathbb{R}^3$.
3. On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$. L'ensemble des solutions de celle-ci est :
$$\mathscr{S} = \left\{ x \longmapsto 1 + (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-x} \,\middle|\, A, B \in \mathbb{R} \right\}$$
Cet ensemble est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$de dimension 2. En effet :
$$\mathscr{S} = f_0 + \vec{\mathscr{S}}$$
où $f_0 : x \longmapsto 1$ et $\vec{\mathscr{S}} = \mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}, x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}\Big)$.

4. Si $\mathscr{S} : AX = B$ est un système linéaire à n équations et p inconnues (*i.e.* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$), alors on sait que l'ensemble des solutions du système est :
$$\mathrm{Sol}(\mathscr{S}) = \big\{X_0 + X \,\big|\, X \in \mathrm{Sol}(\mathscr{H})\big\}$$
que si X_0 est une solution particulière du système $\mathscr{S}$ et $\mathrm{Sol}(\mathscr{H})$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $AX = 0_{n,1}$. On a donc l'égalité :
$$\mathrm{Sol}(\mathscr{S}) = X_0 + \mathrm{Sol}(\mathscr{H}),$$
ce qui signifie que $\mathrm{Sol}(\mathscr{S})$ est un sous-espace affine de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ de direction $\mathrm{Sol}(\mathscr{H})$.
5. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b$$
où $a, b \in \mathbb{R}$ (et $a \neq 1$) est la droite affine de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ suivante :
$$U_0 + \mathrm{Vect}\big((a^n)_{n\in\mathbb{N}}\big),$$
où U_0 est la suite constante égale à $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
6. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ étant deux à deux distincts. On sait que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad P(x_i) = y_i$$
est :
$$\mathscr{L} = \left\{Y + Q\prod_{i=1}^{n}(X - x_i) \,\middle|\, Q \in \mathbb{K}[X]\right\}$$
où $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$, les polynômes $L_1, \ldots, L_n$ étant les polynômes de Lagrange associés aux scalaires $x_1, \ldots, x_n$. On a :
$$\mathscr{L} = Y + \mathrm{Vect}\left(X^k\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)\right)_{k\in\mathbb{N}}$$
est un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$ (de dimension infinie).

Proposition 19 L'intersection de deux sous-espaces affines d'un espace vectoriel est soit vide, soit un sous-espace affine.

Démonstration Soient $\vec{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\vec{F}$ et $\vec{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$ et $A, B \in E$. Posons :
$$F = A + \vec{F} \qquad \text{et} \qquad G = B + \vec{G}$$
Supposons que $F \cap G \neq \varnothing$ et considérons $C \in F \cap G$. Montrons que $F \cap G = C + \vec{F} \cap \vec{G}$, ce qui montrera que $F \cap G$ est le sous-espace affine de $\vec{E}$ de direction $\vec{F} \cap \vec{G}$ et de direction C. On raisonne par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in F \cap G$. Alors il existe $\vec{u} \in \vec{F}$ et $\vec{v} \in \vec{G}$ tels que :
$$x = A + \vec{u} = B + \vec{v}$$
Comme $C \in F \cap G$, il existe $\vec{u}_C \in \vec{F}$ et $\vec{v}_C \in \vec{G}$ tels que :
$$C = A + \vec{u}_C = B + \vec{v}_C$$
On a alors :
$$x = A + \vec{u}_C + \vec{u} - \vec{u}_C = C + \big(\vec{u} - \vec{u}_C\big) \qquad \text{et} \qquad x = C + \big(\vec{v} - \vec{v}_C\big)$$
Comme $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont des espaces vectoriels, on a $\vec{u} - \vec{u}_C \in \vec{F}$ et $\vec{v} - \vec{v}_C \in \vec{G}$. On en déduit que $\vec{u} - \vec{u}_C = \vec{v} - \vec{v}_C \in \vec{F} \cap \vec{G}$, d'où la première inclusion.

$\boxed{\supset}$ se traite de manière analogue ■

Exemple 22 Dans $\mathbb{R}^2$, l'intersection du sous-espace affine de direction $\mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$ et passant par $(0,0)$ et du sous-espace affine de direction $\mathrm{Vect}\big((1,-1)\big)$ passant par $(-1,0)$ est $\{A(...,...)\}$. Il s'agit bien d'un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$. En effet, $\{A\} = A + \{(0,0)\}$.

Proposition 20 Soit $\vec{E}$ et $\vec{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(\vec{E},\vec{F})$ et $A \in F$. Alors :

$$u^{-1}(\{A\}) = \big\{x \in \vec{E} \,\big|\, u(x) = A\big\}$$

est soit vide, soit un sous-espace affine de E dirigé par $\mathrm{Ker}(u)$. On dit que $u(x) = A$ est une équation affine de l'espace affine $u^{-1}(\{A\})$.

Démonstration Supposons que $u^{-1}(\{A\})$ soit non vide et fixons $x_0 \in u^{-1}(\{A\})$. Pour tout $x \in \vec{E}$, on a :

$$x \in u^{-1}(\{A\}) \iff u(x) = A \iff u(x) = u(x_0) \iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}(u),$$

d'où le résultat. ■