Espaces vectoriels : cas de la dimension finie

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Préliminaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Définition

Définition 1 (dimension finie) On dit que E est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Exemple 1 — Les espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x-y-z=0\right\}$ est de dimension finie.
- L'espace $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie (s'il l'était, alors l'ensemble des degrés des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ serait majoré, ce qui n'est pas le cas). *On dit qu'il est de dimension infinie.*

2) Un résultat préliminaire

Lemme 1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\mathscr{F}' = (e_i')_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ deux familles de vecteurs de E telles que :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \qquad e_i' \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

Alors la famille $\mathscr{F}'$ est liée.

Démonstration On utilise un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ (la proposition $\mathscr{P}_n$ étant : « pour toutes familles..., alors $\mathscr{F}'$ est liée »).

- ⋆ **Initialisation :** supposons que $e_1' \in \mathrm{Vect}(e_1)$ et $e_2' \in \mathrm{Vect}(e_1)$. Alors il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$e_1' = \lambda e_1 \qquad \text{et} \qquad e_2 = \mu e_1$$

  La famille $\mathscr{F}' = (e_1', e_2')$ est donc liée.

- ⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Soient $\mathscr{F} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ et $\mathscr{F}' = (e_i')_{1\leqslant i\leqslant n+2}$ des familles de vecteurs de E telles que :

$$\forall i \in [\![1, n+2]\!], \qquad e_i' \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

  Pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, il existe donc $(a_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n+1}$ tel que :

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} e_i$$

  On distingue deux cas.

— Si pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, on a $a_{i,n+1} = 0$, alors $e'_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. On en déduit (hypothèse de récurrence) que la famille $(e'_1, \dots, e'_{n+1})$ est liée, ce qui entraîne que $\mathscr{F}'$ est liée.

— Sinon, il existe $i_0 \in [\![1, n+2]\!]$ tel que $a_{i_0,n+1} \neq 0$. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $i_0 = n+2$.

Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on pose :

$$e''_i = e'_i - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} e'_{n+2},$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} e''_i &= \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} e_j - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} a_{n+2,j} e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(a_{i,j} - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} \right) e_j \\ &\in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, la famille $(e''_1, \dots, e''_{n+1})$ est liée, d'où l'on tire que $\mathscr{F}'$ est liée. ■

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie engendré par une famille de n vecteurs. Alors toute famille libre de E est finie et possède au plus n vecteurs.

Démonstration Soit $\mathscr{L}$ soit une famille libre de E. Par l'absurde, supposons que $\mathscr{L}$ soit constituée d'au moins $n+1$ vecteurs et notons $\mathscr{L}_0$ la sous-famille de $n+1$ vecteurs correspondante. Alors $\mathscr{L}_0$ est libre (puisque $\mathscr{L}$ l'est. Par ailleurs, si $(e'_1, \dots, e'_n)$ est une famille génératrice de E, alors le lemme appliqué aux familles $\mathscr{L}_0$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ montre que $\mathscr{L}_0$ est liée, ce qui est absurde. ■

Exemple 2 Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((1,1,1), (0,-1,2), (1,2,3), (2,-10,2)\big)$ est liée (puisque $\mathbb{R}^3$ est engendré par la famille de trois vecteurs $\big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$).

II – Notion de dimension finie

1) Existence de bases dans un espace de dimension finie

On peut montrer que, dans tout espace de dimension finie, il existe une base de cet espace.

Théorème 1 (de la base incomplète) On suppose que E est de dimension finie. Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille génératrice et $(e_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ une famille libre de E. Alors il existe une partie J de $[\![1, n]\!]$ qui contient $[\![1, k]\!]$ telle que $(e_i)_{i \in J}$ soit une base de E.

Démonstration Considérons l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \big\{ \mathrm{card}(A) \,\big|\, [\![1,k]\!] \subset A \subset [\![1,n]\!] \text{ et } (e_i)_{i \in I} \text{ est libre} \big\}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui est majorée par n et non vide (puisque $k \in \mathscr{E}$). On peut donc considérer le maximum m de $\mathscr{E}$. Il existe aussi une partie I_0 de $[\![1, n]\!]$, de cardinal m qui contient I tel que $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I_0}$ soit libre. Il reste à montrer que la famille $\mathscr{B}$ est génératrice de E. Comme $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I_0} \lambda_i e_i + \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus I_0} \lambda_i e_i$$

Soit $i \in [\![1, n]\!] \setminus I_0$. Alors $\mathscr{B} \cup \{e_i\}$ n'est pas libre (par maximalité de m) donc $e_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$. Ainsi, $x \in \mathscr{B}$, d'où le résultat. ■

Exemple 3 La famille $\big((1,-5,7),(2,6,8)\big)$ est une base de :

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1)\big)$$

En effet :

- ⋆ La famille $\big((1,-5,7)\big)$ est libre car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.
- ⋆ La famille $\big((1,-5,7),(2,6,8)\big)$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.
- ⋆ On remarque que :

$$(3,1,15) = (1,-5,7) + (2,6,8) \qquad \text{et} \qquad (1,11,1) = -(1,-5,7) + (2,6,8)$$

donc les familles $\big((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15)\big)$ et $\big((1,-5,7),(2,6,8),(1,11,1)\big)$ sont liées.

On en déduit le résultat annoncé.

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 1 Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base (finie).

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème 1 avec la famille $\mathscr{F} = \varnothing$. ■

2) Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $E \neq \{0_E\}$.

Théorème 2 (de la base incomplète) Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Démonstration Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E (qui est nécessairement finie d'après le lemme) de cardinal k. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice (finie) de E. Considérons la famille finie $\mathscr{M}$ constituée des vecteurs de $\mathscr{L}$ et de $\mathscr{G}$. La famille $\mathscr{M}$ est génératrice de E et ses k premiers vecteurs (les vecteurs de $\mathscr{L}$) forment une famille libre. En appliquant l'algorithme de la base incomplète, on obtient une base de E dont les k premiers vecteurs sont ceux de $\mathscr{L}$. ■

Théorème 3 (de la base extraite) De toute famille génératrice de E, on peut en extraire une base.

Démonstration Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Comme $E \neq \{0_E\}$, il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $x \in \mathscr{G}$. On applique alors l'algorithme de la base incomplète à la sous-famille (x) de $\mathscr{G}$. On obtient une sous-famille de $\mathscr{G}$ qui est une base de E. ■

✎✎✎ **Exercice 1** Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivants :

1. $A = \big\{P \in \mathbb{R}_2[X] \;\big|\; P(0) + P(1) = 0\big\}$
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & a+b \\ 0 & b+c & 0 \\ a+b & 0 & a+b \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Une solution.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. Alors :
$$\begin{aligned} P \in A \iff P(0)+P(1)=0 \iff a+b+2c=0 &\iff a=-b-2c \\ &\iff P=(-b-2c)X^2+bX+c \\ &\iff P=b(X-X^2)+c(1-2X^2) \\ &\iff P \in \operatorname{Vect}(X-X^2, 1-2X^2) \end{aligned}$$
On a donc :
$$A = \operatorname{Vect}(X-X^2, 1-2X^2)$$
La famille $(X-X^2, 1-2X^2)$ est génératrice de A. Montrons maintenant que cette famille est libre. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$\begin{aligned} \alpha(X-X^2)+\beta(1-2X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} &\iff \beta + \alpha X + (-\alpha-2\beta)X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \beta &=& 0 \\ \alpha &=& 0 \\ -\alpha-2\beta &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$
car la famille $(1,X,X^2)$ est libre. On a donc $\alpha=\beta=0$. Ainsi, la famille $(X-X^2, 1-2X^2)$ est libre. Finalement, cette famille est une base de A.
2. On a :
$$\begin{aligned} B &= \left\{ a\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \right) \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \end{aligned}$$
En posant $M = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, la famille (M,N) est génératrice de B. Elle est de plus libre. En effet, pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on a :
$$\alpha M + \beta N = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix}\alpha&0&\alpha\\0&\beta&0\\\alpha&0&\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \iff \alpha=\beta=0$$
Une base de B est donc la famille (M,N).

3) Définition de la dimension

Le résultat suivant va nous permettre de définir la notion de dimension. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 4 (nombre de vecteurs d'une base) Toutes les bases de E ont le même nombre (fini) de vecteurs.

Démonstration Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Les deux familles sont libres donc de cardinal fini d'après le résultat précédent. Comme $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ est génératrice de E, on a $\operatorname{card}(\mathscr{B}) \leqslant \operatorname{card}(\mathscr{B}')$. On échange ensuite les rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. ■

On peut enfin définir la notion centrale du chapitre.

Définition 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *dimension de* E, notée $\dim(E)$, le cardinal d'une base quelconque de E.

Remarques :

- ⋆ On a $\{0_E\} = \mathrm{Vect}(\varnothing)$ et $\varnothing$ est une famille libre et génératrice de $\{0_E\}$ donc $\{0_E\}$ est de dimension finie égale à 0.
- ⋆ La dimension d'un espace de dimension finie dépend en fait du corps de base. Par exemple $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ (une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est $(1, i)$) et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ (une base étant ici (1)).
- ⋆ Soit $v \in E \setminus \{0_E\}$ et :
$$\mathscr{D}_v = \left\{\lambda v \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{K}\right\} = \mathrm{Vect}(v)$$
La droite vectorielle $\mathscr{D}_v$ est de dimension 1 (une base de $\mathscr{D}_v$ étant (v)).
- ⋆ Soient u et v deux vecteurs non colinéaires de E et le plan vectoriel :
$$\mathscr{P}_{u,v} = \left\{\lambda u + \mu v \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\} = \mathrm{Vect}(u, v)$$
Alors $\dim(\mathscr{P}_{u,v}) = 2$ (une base de $\mathscr{P}_{u,v}$ étant (u, v)).

4) Conséquences sur les familles libres et génératrices

Proposition 2 (cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}$.

- ⋆ Toute famille libre de vecteurs de E comporte au plus n vecteurs.
- ⋆ Toute famille génératrice finie de vecteurs de E comporte au moins n vecteurs.

Démonstration ⋆ On l'a déjà démontré (proposition 1).

- ⋆ Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice finie de E, alors on peut en extraire une base (d'après le théorème de la base extraite). Cette base contient n vecteurs, donc $\mathscr{G}$ contient bien au moins $n + 1$ vecteurs. ■

Exemple 4 — La famille $\big((1, 1), (1, 2), (1, 3)\big)$ n'est pas libre dans $\mathbb{K}^2$.
— La famille $(X^2 - X, X)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Le résultat suivant est très utile en pratique.

Proposition 3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

- ⋆ Si $\mathscr{L}$ est une famille libre de E de cardinal n, alors $\mathscr{L}$ est une base de E.
- ⋆ Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E de cardinal n, alors $\mathscr{G}$ est une base de E.

Démonstration ⋆ Soit $\mathscr{L}$ est une famille libre de E de cardinal n. On peut compléter (d'après le théorème de la base incomplète) $\mathscr{L}$ en une base de E qui doit être de cardinal n. Comme $\mathscr{L}$ possède déjà n vecteurs, il s'agit bien d'une base de E.

- ⋆ Soit $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E de cardinal n. D'après le théorème de la base extraite, on peut extraire de $\mathscr{G}$ une base de E. Pour la même raison de cardinalité, $\mathscr{G}$ est une base de E. ■

Exemple 5 La famille $\big((-1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) Dimension des espaces vectoriels usuels

Proposition 4 (i) Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie égales à :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n, \qquad \dim -\mathbb{K}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 \qquad \text{et} \qquad \dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$$

En particulier, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$.

(ii) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $a \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + a(x)y = 0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

(iii) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' + ay' + by = 0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

(iv) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des suites numériques telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.

Démonstration (i) voir le chapitre précédent

(ii) On sait que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation différentielle est :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \in I \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-A(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{-A(x)} \right),$$

où A est une primitive de a sur I. Le résultat s'ensuit puisque $x \longmapsto \mathrm{e}^{-A(x)}$ n'est pas la fonction nulle.

(iii) On distingue deux cas suivant la valeur du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$ de l'équation caractéristique. Par exemple, si $\Delta = 0$ et si r est la racine de l'équation, alors l'ensemble $\mathscr{S}$ de l'équation différentielle est :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \longmapsto (Ax+B)\,\mathrm{e}^{rx} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}, x \longmapsto \mathrm{e}^{rx} \right)$$

et on vérifie facilement que la famille $\left(x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}, x \longmapsto \mathrm{e}^{rx} \right)$ est libre, d'où le résultat.

(iv) On procède comme dans (iii) en utilisant le théorème donnant la forme des suites récurrentes linéaires d'ordre deux. ■

6) Dimension d'un produit cartésien

Proposition 5 (dimension d'un produit) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \times F$ est de dimension finie égale à :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

Démonstration Comme E et F sont de dimension finie, on peut en trouver des bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ respectivement.

- ⋆ Pour tout $(x,y) \in E \times F$, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{k=1}^{p} y_k f_k$$

Alors :

$$(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{p} y_k f_k \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k, 0_F) + \sum_{k=1}^{p} y_k (0_E, f_k)$$

La famille finie $\big((e_1, 0_F), \ldots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \ldots, (0_E, f_p)\big)$ est donc génératrice de $E \times F$; cet espace est donc de dimension finie.

- ⋆ On vérifie facilement que la famille précédente est libre. Il s'agit donc d'une base de $E \times F$. On en déduit bien la dimension annoncée de $E \times F$. ■

III – Sous-espaces et dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

1) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 6 (dimension d'un sous-espace vectoriel) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

- ⋆ F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$;
- ⋆ on a $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Démonstration ⋆ Il n'y a rien à démontrer si $F = \{0_E\}$. Supposons que $F \neq \{0_E\}$. Considérons l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \left\{\mathrm{card}(\mathscr{L}) \,\middle|\, \mathscr{L} \text{ libre dans } F\right\}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui est non vide et majoré par $\dim(E)$ (puisque toute famille libre de F est une famille libre de E donc constituée d'au plus $\dim(E)$ vecteurs). Ainsi, $\mathscr{E}$ possède un plus grand élément $m \leqslant \dim(E)$. De plus, il existe une famille libre $\mathscr{L}$ de F de cardinal m.

Soit $x \in F$. La famille $\mathscr{L}_x = \mathscr{L} \cup \{x\}$ n'est pas libre dans F (par définition de m et car $\mathrm{card}(\mathscr{L}_x) = m+1 > m$) donc x est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{L}$. On vient donc de montrer que $\mathscr{L}$ est une famille génératrice de F. Ainsi, $\mathscr{L}$ est une base de F. On peut donc conclure que F est de dimension finie et que $m = \dim(F) \leqslant \dim(E)$.

⋆ Si $E = F$, on a clairement $\dim(E) = \dim(F)$. Réciproquement, si $\dim(E) = \dim(F)$, alors la famille libre $\mathscr{L}$ précédente est de cardinal égal à $\dim(E)$ donc $\mathscr{L}$ est une base de E. Ainsi :

$$F = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}) = E$$

Exemple 6 Dans $\mathbb{R}^3$, le sous-espace vectoriel :

$$\mathscr{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - y - z = 0\right\}$$

est de dimension finie égale à $2 \leqslant 3$.

2) Dimension d'une somme de deux sous-espaces

Le résultat suivant nous donne une information sur la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie.

Rappel : si F et G sont deux sous-espaces vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors on définit la somme $F + G$ par :

$$F + G = \left\{x + y \,\middle|\, (x, y) \in F \times G\right\}$$

On sait que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E et que $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Proposition 7 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est de dimension finie égale à :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration On sait que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc $F \cap G$ est de dimension finie. Considérons-en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. De même, F et G sont de dimension finie.

- ⋆ D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathscr{B}$ en une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ de F.
- ⋆ On peut de même compléter $\mathscr{B}$ en une base $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$ de G.

La famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est alors une famille génératrice de $F + G$. Montrons que celle-ci est libre. Soit :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+q+r}$$

tel que :

$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p}_{\in F \cap G} + \underbrace{\mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q}_{\in F} + \underbrace{\nu_1 g_1 + \dots + \nu_p g_r}_{\in G} = 0_E$$

- — Comme $F \cap G$ est un espace vectoriel, on a aussi $\nu_1 g_1 + \dots + \nu_p g_r \in F \cap G$. Or $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$ est libre donc $\nu_1 = \dots = \nu_r = 0$.
- — De même, $\mu_1 = \dots = \mu_q = 0$.
- — Il reste $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p f_p = 0_E$ et donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ par liberté de $(e_1, \dots, e_p)$. ■

Exemple 7 Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans vectoriels non confondus de $\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\dim(\mathscr{P} \cap \dim(\mathscr{Q}) = \dim(\mathscr{P}) + \dim(\mathscr{Q}) - \dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q}) = 4 - \dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q})$$

Comme $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ne sont pas confondus, il existe $x \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{Q}$. Par conséquent :

$$2 < \dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q}) \leqslant 3$$

donc $\dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q}) = 3$. On en déduit que $\dim(\mathscr{P} \cap \dim(\mathscr{Q}) = 1$, ce qui signifie que $\dim(\mathscr{P} \cap \dim(\mathscr{Q})$ est une droite vectorielle.

3) Supplémentaires en dimension finie

Rappel : si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle supplémentaire de F dans E tout sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :
- — $E = F + G$;
- — $F \cap G = \{0_E\}$.

Proposition 8 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in \mathbb{N}$. Alors :

(i) F admet un supplémentaire dans E ;

(ii) tout supplémentaire de F dans E est de dimension $\dim(E) - p$.

Démonstration (i) Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E (où $n = \dim(E)$). Posons alors :

$$G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$$

Il est clair que $E = F \oplus G$.

(ii) Soit G un supplémentaire de F dans E. D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(E) = \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(\underbrace{F \cap G}_{=\{0_E\}}) = \dim(F) + \dim(G),$$

d'où le résultat. ■

Remarque : la base de $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ construite dans la démonstration est dite *adaptée* à la somme directe $F \oplus G$

Exemple 8 — Dans $\mathbb{R}^3$, le supplémentaire d'un plan vectoriel est une droite vectorielle.
- — Dans $\mathbb{R}^3$, le supplémentaire dune droite vectorielle est un plan vectoriel.

Le résultat suivant est utilise en pratique pour montrer que des sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie.

Proposition 9 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Démonstration ($\Rightarrow$) C'est évident (découle de la proposition précédente ou de la proposition précédente pour la formule sur la dimension).

($\Leftarrow$) Il reste à montrer que $E = F + G$. On peut considérer des bases $(f_1, \ldots, f_p)$ de F et $(g_{p+1}, \ldots, g_n)$ de G (où $n = \dim(E)$). Il suffit de montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_{p+1}, \ldots, g_n)$ est génératrice de E (en effet, si tel est le cas, on aura bien l'égalité $E = F + G$). Comme cette famille comporte n vecteurs, elle est génératrice de E si et seulement si elle est libre. Soit alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k g_k \qquad \text{soit encore} \qquad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = -\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k g_k \in F \cap G = \{0_E\}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = 0_E \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k g_k = 0_E$$

puis, par liberté des deux familles $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_{p+1}, \ldots, g_n)$,

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

La famille $(f_1, \ldots, f_p, g_{p+1}, \ldots, g_n)$ est donc bien libre, d'où le résultat. ■

Exemple 9 Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces vectoriels :

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0)\big) \qquad \text{et} \qquad G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x - y - z = 0\big\}$$

sont supplémentaires.

IV – Rang d'une famille de vecteurs

1) Définition

Définition 3 (rang d'une famille finie de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle *rang de* $\mathscr{F}$, la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. On le note $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$. Ainsi :

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\big)$$

Exemple 10
- Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{rg}\big((0,1),(0,-1)\big) = 1$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathrm{rg}(X, X^2+1) = 2$ car la famille (X, X^2+1) est libre.

2) Propriétés

Proposition 10 (lien avec les familles libres/génératrices) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

(i) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \min(n,p)$;

(ii) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = p \iff \mathscr{F}$ est libre ;

(iii) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n \iff \mathscr{F}$ est une famille génératrice de E ;

(iv) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n = p \iff \mathscr{F}$ est une base de E.

Démonstration immédiat ■

Pour le calcul pratique du rang, voir le chapitre sur les applications linéaires.