Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Généralités

1) Notion d'espace vectoriel

Définition 1 (espace vectoriel) Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

- ⋆ une loi de composition *interne* $+ : E \times E \longrightarrow E$;
- ⋆ une loi de composition *externe* $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$.

On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou que E est un espace vectoriel) si :

(1) $(E, +)$ est un groupe abélien (*on notera* 0_E *le vecteur nul de* $(E, +)$) ;

(2) $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ ($1_{\mathbb{K}}$ *est élément neutre pour la multiplication par les scalaires*) ;

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (*distributivité de la multiplication par les scalaires par rapport à l'addition dans* E) ;

(4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (*distributivité de la multiplication par les scalaires par rapport à l'addition des scalaires*) ;

(5) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (*associativité de la multiplication par les scalaires*).

Vocabulaire : les éléments de E sont appelés *vecteurs*, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Remarque : dans la pratique, on omettra le « $\cdot$ » de le multiplication externe : on écrira λx au lieu de $\lambda \cdot x$.

Exemple 1 — L'ensemble $\mathbb{K}$ (muni de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (on vérifie facilement que les propriétés de (1) à (5) sont vraies).

— De même, $(\mathbb{K}^2, +, \cdots)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où l'on définit $+$ et $\cdot$ par :

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b) \qquad \text{et} \qquad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Proposition 1 (équations produit dans un espace vectoriel) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. Alors :

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E$$

Démonstration On raisonne par double implication. Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$.

($\Leftarrow$) On traite deux cas.

— Supposons que $\lambda = 0$. Puisque $0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, on a :

$$(0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdots x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x \qquad \text{soit, en développant,} \qquad 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x,$$

puis, par régularité de $0_{\mathbb{K}} \cdot x$ dans le groupe E, on a bien $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.

— En supposant maintenant que $x = 0_E$, on utilise cette fois le fait que $0_E + 0_E = 0_E$ pour obtenir le même résultat, à savoir que $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

($\Rightarrow$) Supposons que $\lambda \cdot x = 0_E$ et que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$. Alors (propriété (5)) :

$$\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot x = 0_E,$$

c'est-à-dire $1_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$, soit encore (propriété (2)) $x = 0_E$, d'où le résultat. ■

Notation/rappel : dans le groupe *additif* $(E, +)$, le symétrique d'un vecteur $x \in E$ est noté $-x$ (on a donc $x + (-x) = 0_E$).

Proposition 2 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E$. Alors :

$$(-1) \cdot x = -x$$

Démonstration Soit $x \in E$. On calcule :

$$1_{\mathbb{K}} \cdot x + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = \big(1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}})\big) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$$

d'où le résultat par unicité de l'inverse dans un groupe. ■

2) Exemples fondamentaux

(a) $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{K}^n$, muni de $+$ et $\cdot$ défini ci-dessous, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \in (\mathbb{K}^n)^2, \quad , (x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n)$$

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ pour $+$ est $0_{\mathbb{K}^n} = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$.

Remarque : on peut aussi dire que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (si on multiplie un élément de $\mathbb{C}^n$ par un réel, on obtient encore un élément de $\mathbb{C}^n$), mais $\mathbb{R}^n$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(b) Espace $\mathbb{K}[X]$

L'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, le vecteur nul étant $0_{\mathbb{K}[X]}$ (polynôme nul).

(c) Espace des fonctions $\mathbb{K}^\Omega$

Soit Ω un ensemble non vide (quelconque). On rappelle que $\mathbb{K}^\Omega$ désigne l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $(f, g) \in (\mathbb{K}^\Omega)^2$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on rappelle que la fonction $f + \lambda g : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par :

$$\forall x \in \Omega, \qquad (f + \lambda)(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

On vérifie facilement que $(\mathbb{K}^\Omega, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de cet espace est la fonction nulle $0_{\mathbb{K}^\Omega} : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$.

Cas particulier : pour $\Omega = \mathbb{N}$, on obtient que l'ensemble des suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(d) Espace $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le triplet $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau ($\times$ désigne ici le produit matriciel). On vérifie facilement que pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, le triplet $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(e) Produit cartésien d'espaces vectoriels

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On peut montrer que le produit cartésien $E = E_1 \times \dots E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \in E^2, \quad , (x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n)$$

Il suffit en effet de vérifier les points (1) à (5) de la définition.

3) Notion de combinaison linéaire

Définition 2 (combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs) Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $u \in E$. On dit que le vecteur u s'exprime comme *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

Exemple 2

1. Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(-2, 0)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2)$ et $(3, 2)$ car :

$$(-2, 0) = (1, 2) - (3, 2) = 1 \times (1, 2) + (-1) \times (3, 2)$$

2. Dans $\mathbb{R}[X]$, Le polynôme $\mathrm{P} = X^2 - 2X + 3$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $1, X, X^2$.
3. Plus généralement, tout polynôme de degré inférieur ou égal à n (*i.e.* tout élément de $\mathbb{K}_n[X]$) s'exprime comme combinaison linéaire des monômes 1, $X, \dots, X^n$.
4. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ s'exprime comme combinaison linéaire de :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque $A = B - iC - D$.

✎✎✎ **Exercice 1**

1. (a) Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $x = (1, 2, 3)$ s'exprime-t-il comme combinaison linéaire des vecteurs $u = (1, -1, 1)$ et $v = (1, 1, 2)$?
   (b) Et le vecteur $0_{\mathbb{R}^3}$?
   (c) Et le vecteur $w = (2, 6, 6)$?
2. On note $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soient les vecteurs $f : x \longmapsto \sin(x)$ et $g : x \longmapsto \cos(x)$.
   (a) La fonction $h : x \longmapsto \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ s'exprime-t-elle comme combinaison linéaire de f et g ?
   (b) Montrer que $j : x \longmapsto \sin(2x)$ ne s'exprime pas comme combinaison linéaire de f et g.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que A s'exprime comme combinaison linéaire des matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une solution.

1. (a) Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On résout :

$$x=\lambda u+\mu v \iff (1,2,3)=(\lambda+\mu,-\lambda+\mu,\lambda+2\mu) \iff \begin{cases} \lambda+\mu &= 1 \\ -\lambda+\mu &= 2 \\ \lambda+2\mu &= 3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda+\mu &= 1 & \mathrm{L}_1 \\ 2\mu &= 3 & \mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2 \\ \mu &= 2 & \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1 \end{cases}$$

Les valeurs de μ obtenues sont incompatibles donc le système n'admet pas de solution $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On peut donc conclure que x ne s'exprime pas comme combinaison linéaire de u et v.

(b) On a $0_{\mathbb{R}^3}=0\times u+0\times v$ donc $0_{\mathbb{R}^3}$ s'exprime comme combinaison linéaire de u et v.

(c) Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On résout :

$$w=\lambda u+\mu v \iff (1,2,3)=(\lambda+\mu,-\lambda+\mu,\lambda+2\mu) \iff \begin{cases} \lambda+\mu &= 2 \\ -\lambda+\mu &= 6 \\ \lambda+2\mu &= 6 \end{cases} \overset{\text{facile}}{\iff} \begin{cases} \lambda &= -2 \\ \mu &= 4 \end{cases}$$

On a donc $w=-2u+4v$. Le vecteur w s'exprime donc comme combinaison linéaire de u et v.

2. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a (en utilisant la formule d'addition du sinus) :

$$h(x)=\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}f(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}g(x)$$

On a donc l'égalité :

$$h=\frac{\sqrt{2}}{2}f+\frac{\sqrt{2}}{2}g$$

ce qui prouve que h s'exprime comme combinaison linéaire de f et g.

(b) On raisonne par l'absurde : supposons que j s'exprime comme combinaison linéaire de f et g. Il existe alors $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad j(x)=\lambda\sin(x)+\mu\cos(x)$$

c'est-à-dire :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sin(2x)=\lambda\sin(x)+\mu\cos(x)$$

En évaluant en $x=0$, on obtient :

$$\sin(2\times 0)=\lambda\sin(0)+\mu\cos(0)\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad 0=\lambda\times 0+\mu$$

soit encore $\mu=0$. Il reste :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sin(2x)=\lambda\sin(x)$$

En évaluant ensuite en $x=\dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda=0$ (puisque $\sin(\pi)=0$ et $\sin(\pi/2)=1$). On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sin(2x)=0$$

Pour $x=\frac{\pi}{4}\in\mathbb{R}$ par exemple, on a $\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. Ceci est absurde car on sait que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\neq 0$. Finalement, j n'est pas combinaison linéaire de f et g.

3. Soit $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Il existe alors $(a,b,d)\in\mathbb{R}^3$ tel que $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d\end{pmatrix}$ (puisque A est symétrique). On a alors :

$$A=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=aM+bN+dP$$

Donc A s'exprime comme combinaison linéaire de M, N et P.

On peut généraliser la notion de combinaison linéaire en introduisant celle de famille presque nulle.

Définition 3 (famille presque nulle) Une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I$ est dite *presque nulle* (ou *à support fini*) s'il existe un sous-ensemble fini J de I tel que :

$$\forall i\in I\setminus J,\qquad \lambda_i=0$$

Notation Si $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, alors on pose (avec l'ensemble J de la définition) :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i \qquad \text{(somme finie)}$$

On dit encore que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ est une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Exemple 3 Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II – Sous-espaces vectoriels

1) Définition

Définition 4 (sous-espace vectoriel) Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un $\mathbb{K}$-*sous-espace vectoriel de* E si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 4 Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de E (dits *triviaux*). On dit aussi que $\{0_E\}$ est l'*espace nul*.

Comme pour les notions de sous-groupes et de sous-anneaux, on dispose d'une caractérisation pratique de la notion de sous-espace vectoriel.

Proposition 3 Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $0_E \in F$;

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in F^2,\ x + \lambda y \in F$ (*l'ensemble F est stable par combinaisons linéaires*).

Démonstration La preuve est analogue à celle pour les sous-groupes/sous-anneaux. ∎

2) Exemples

(a) $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que :

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \,\middle|\, \deg(P) \leqslant n \right\}$$

Alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
Justification :

- Clairement, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]}$ est de degré $-\infty$. Ce degré est bien inférieur ou égal à n. Donc $0_{\mathbb{K}[X]} \in \mathbb{K}_n[X]$.
- Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(P, Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2$. D'après les propriétés du degré, on a :

  $$\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \leqslant \max(n, n) = n$$

  car on sait que $\deg(P) \leqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant n$ (puisque P et Q appartiennent à $\mathbb{K}_n[X]$). Donc $P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$. De plus :

  $$\deg(\lambda P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda = 0 \\ \deg(P) \leqslant n & \text{si } \lambda \in \mathbb{K}^* \end{cases}$$

  Dans tous les cas, on a $\deg(\lambda P) \leqslant n$ donc $\lambda P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Ainsi, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

(b) Droite et plan (vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

⋆ Soit $v \in E \setminus \{0_E\}$. On appelle *droite vectorielle engendrée par le vecteur* v l'ensemble :

$$\mathscr{D}_v = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

On montre facilement que $\mathscr{D}_v$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarques :

— Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on retrouve la notion de droite (vectorielle) usuelle vue dans les classes antérieures.

— Si $v = 0_E$, alors $\mathscr{D}_v = \{0_E\}$.

⋆ Soient u et v deux vecteurs *non colinéaires* de E (ce qui signifie qu'il n'existe pas de scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$). On définit le *plan vectoriel engendré par les vecteurs* u *et* v le sous-ensemble de E suivant :

$$\mathscr{P}_{u,v} = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$$

On montre facilement que $\mathscr{P}_{u,v}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : dans $\mathbb{R}^3$, on retrouve la notion de plan (vectoriel) vu en terminale.

✎✎✎ **Exercice 2**

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
   (a) Montrer que $F = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   (b) L'ensemble $G = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k = 1\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?
2. L'ensemble $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3. Montrer que $K = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[X] \mid \mathrm{P}' - 2X\,\mathrm{P} = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Montrer que $L = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M + {}^tM = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Une solution.

1. (a) Par définition, F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ appartient à F car $\sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.
   Soient maintenant $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $x + \lambda y \in F$. On a :
   $$x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1, \ldots, x_n + \lambda y_n)$$
   Par linéarité de la somme, on a :
   $$\sum_{k=1}^{n} (x_k + \lambda y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k = 0 + \lambda 0 = 0$$
   car x et y appartiennent à F. On a donc $x + \lambda y \in F$. Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$ n'appartient pas à G car $\sum_{k=1}^{n} 0 = 0 \neq 1$ donc G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. On a $(1, 0) \in H$, $(0, 1) \in H$ (en effet : $1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$) mais $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin H$ (puisque $1 \times 1 \neq 0$). Comme H n'est pas stable pour l'addition, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. Le polynôme nul $0_{\mathbb{R}_2[X]}$ appartient à K car :
   $$0'_{\mathbb{R}_2[X]} - 2X0_{\mathbb{R}_2[X]} = 0_{\mathbb{R}_2[X]} - 0_{\mathbb{R}_2[X]} = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$
   Soient maintenant $(P, Q) \in K^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $P + \lambda Q \in K$. Par linéarité de la dérivation, on a :
   $$\begin{aligned}(P + \lambda Q)' - 2X(P + \lambda Q) = P' + \lambda Q' - 2XP - 2\lambda XQ &= (P' - 2XP) + \lambda(Q' - 2XQ) \\ &= 0_{\mathbb{R}_2[X]} + \lambda 0_{\mathbb{R}_2[X]} \qquad (\text{car } (P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2) \\ &= 0_{\mathbb{R}_2[X]}\end{aligned}$$
   Donc $P + \lambda Q \in K$. Finalement, K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. La matrice nulle $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à L car :

$$0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} + {}^t0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} + 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

Soient maintenant $(M, N) \in L^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $M + \lambda N \in L$. Par linéarité de la transposition, on a :

$$\begin{aligned}(M + \lambda N) + {}^t(M + \lambda N) = M + \lambda N + {}^tM + \lambda {}^tN = (M + {}^tM) + \lambda(N + {}^tN) &= 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} + 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \qquad (\text{car } (M, N) \in L^2)\\ &= 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

Ainsi, $M + \lambda N \in L$. Donc L est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 5 Dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérons le sous-espace vectoriel $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $f_\theta : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x + \theta)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_\theta(x) = \cos(\theta)\cos(x) - \sin(\theta)\sin(x)$$

c'est-à-dire :

$$f_\theta = \cos(\theta)\cos - \sin(\theta)\sin \in \mathscr{P}$$

(c) Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène

Proposition 4 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire *homogène* :

$$AX = 0_{\mathbb{K}^n}$$

d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Démonstration Posons $\mathscr{S} = \left\{X \in \mathbb{K}^p \,\middle|\, AX = 0_{\mathbb{K}^n}\right\}$.

- ⋆ Tout d'abord, il est clair que $\mathscr{S} \subset \mathbb{K}^p$.
- ⋆ Ensuite, $A \times 0_{\mathbb{K}^p} = 0_{\mathbb{K}^n}$ donc $0_{\mathbb{K}^p} \in \mathscr{S}$.
- ⋆ Enfin, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(X, Y) \in \mathscr{S}^2$, on a :

$$A(X + \lambda \cdot Y) = AX + \lambda \cdot AY = 0_{\mathbb{K}^n} + \lambda \cdot 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}$$

Ainsi, $X + \lambda Y \in \mathscr{S}$.

Donc $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. ■

(d) Autres exemples

- — L'ensemblec des suites $u \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ (vérification immédiate).
- — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, alors l'ensemble $\mathscr{C}^n(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\Omega$.
- — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- — L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

3) Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Rappel : soit I un ensemble non vide, E un ensemble et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On rappelle que l'intersection des sous-ensembles de cette famille est le sous-ensemble de E suivant :

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \left\{x \in E \,\middle|\, \forall i \in I,\ x \in F_i\right\}$$

Proposition 5 (intersection de sous-espaces vectoriels) Soit I un ensemble non vide, E un ensemble et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors, $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Tout d'abord, il est clair, par définition de l'intersection, que $\bigcap_{i\in I} F_i \subset E$.

- ⋆ Pour tout $i \in I$, on a $0_E \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$.
- ⋆ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^2$. Soit $i \in I$. Alors $(x, y) \in F_i^2$ donc $x+\lambda y \in F_i$ (puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E). Ainsi, $x + \lambda y \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

Ainsi, $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Attention : c'est faux pour la réunion ! En effet, dans $\mathbb{R}^2$, si on pose $F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (car $F \cup G = H$, *cf.* Exercice 2). Pourtant, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ car :

$$F = \{x(1, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((1, 0)\big) \qquad \text{et, de la même façon,} \qquad G = \mathrm{Vect}\big((0, 1)\big)$$

4) Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie quelconque de E.

Définition 5 (Vect(A)) On appelle *sous-espace vectoriel de E engendré par A* l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.
Cas particulier : si $A = \{x_i \mid i \in I\}$ est une famille de vecteurs de A, on note aussi $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

Remarques :

- ⋆ En tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E, l'ensemble $\mathrm{Vect}(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de E.
- ⋆ Par définition de $\mathrm{Vect}(A)$, on a clairement $A \subset \mathrm{Vect}(A)$.
- ⋆ Tout sous-espace vectoriel de E qui contient A contient également $\mathrm{Vect}(A)$.

Exemple 6 — $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \mathrm{Vect}(\{0_E\}) = E$ et $\mathrm{Vect}(E) = E$
- — Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\mathrm{Vect}(F) = F$ (en effet, on a toujours $F \subset \mathrm{Vect}(F)$ et comme $\mathrm{Vect}(F)$ est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant F et que F en est un, on a l'inclusion réciproque).
- — Si v est un vecteur de E, alors $\mathrm{Vect}(\{v\}) = \mathscr{D}_v$.
- — Si u et v sont deux vecteurs non colinéaires de E, alors $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathscr{P}_{u,v}$.

On dispose d'une caractérisation plus pratique de $\mathrm{Vect}(A)$.

Proposition 6 L'ensemble $\mathrm{Vect}(A)$ est celui des vecteurs de E qui s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs de A. Autrement dit :

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{x \in E \,\middle|\, \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\,(a_1, \dots, a_n) \in A^n,\ \exists\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right\}$$

Démonstration On note F l'ensemble des vecteurs de E qui s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs de A.

- $\star$ On vérifie facilement que F est un sous-espace vectoriel de E qui contient A. Par définition de $\mathrm{Vect}(A)$, on a donc l'inclusion $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.
- $\star$ Si G est un sous-espace vectoriel de E contenant A, alors on a nécessairement $F \subset G$ (car G est stable comme combinaisons linéaires) donc $F \subset \mathrm{Vect}(A)$.

On a donc bien l'égalité $F = \mathrm{Vect}(A)$. ■

Exemple 7

1. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\big((1,0),(0,1)\big)$
   En effet :
   $$\mathbb{R}^2 = \big\{(x,y) \,\big|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} = \big\{x(1,0)+y(0,1) \big|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} = \mathrm{Vect}\big((1,0),(0,1)\big)$$
2. $\mathbb{C}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$
   En effet, $\mathbb{C}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degrés inférieurs ou égaux à 2 donc :
   $$\mathbb{C}^2[X] = \big\{aX^2 + bX + c \,\big|\, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\big\} = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$$
3. $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.
   En effet :
   $$\begin{aligned}\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\} &= \left\{a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Remarque : si on montre qu'un ensemble s'écrit sous la forme $\mathrm{Vect}(A)$, alors il s'agit d'un (sous-)espace vectoriel. **Souvent, on montrera qu'un ensemble est un espace vectoriel en l'écrivant sous cette forme !**

✎✎✎ **Exercice 3**

1. Montrer que $\mathrm{A} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x - 2y + z = 0\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathrm{B} = \big\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[X] \,\big|\, X\,\mathrm{P}' = \mathrm{P}\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que $\mathrm{C} = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\right\}$ est un espace vectoriel.
4. Montrer que $\mathrm{D} = \big\{x \longmapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x} \,\big|\, (a,b) \in \mathbb{R}^3\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Une solution.

1. Tout d'abord, on a bien $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^3$ par définition de A. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :
   $$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{A} \iff x - 2y + z = 0 \iff x = 2y - z &\iff (x,y,z) = (2y-z, y, z) \qquad (\star)\\ &\iff (x,y,z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1) \\ &\iff (x,y,z) \in \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)\end{aligned}$$
   On a donc $\mathrm{A} = \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)$. Ainsi, A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Tout d'abord, on a bien $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}_2[X]$ par définition de B. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. On a $P' = 2aX + b$ et :
   $$\begin{aligned}P \in \mathrm{B} \iff P = XP' &\iff aX^2 + bX + c = X(2aX + b) \\ &\iff aX^2 + bX + c = 2aX^2 + bX \\ &\iff \begin{cases} a = 2a \\ b = b \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{(par unicité des coefficients d'un polynôme)} \\ &\iff a = c = 0 \\ &\iff P = bX \\ &\iff P \in \mathrm{Vect}(X)\end{aligned}$$
   Donc $\mathrm{B} = \mathrm{Vect}(X)$. On peut donc conclure que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Par définition de C, on a bien $\mathrm{C} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Pour montrer que C est un espace vectoriel, il suffit de montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. On a :

$$\mathrm{C} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

donc C est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

4. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $f_{a,b} : x \longmapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. On a donc $\mathrm{D} \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De plus :

$$\mathrm{D} = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}, x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\right)$$

En effet, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $f_{a,b} : x \longmapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x}$ s'exprime comme combinaison linéaire des fonctions $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ (plus précisément, $f_{a,b} = af + bg$). donc D est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition 7 Soient A et B deux parties de E. Alors :

(i) $\mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(A)$;

(ii) $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$;

(iii) $\mathrm{Vect}(A \cap B) \subset \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$;

(iv) si $a \in A$ est combinaison linéaire des vecteurs de $A \setminus \{a\}$, alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$.

(i) Cette propriété provient du fait que $\mathrm{Vect}(F) = F$ si F est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) C'est évident en utilisant (par exemple) la définition de $\mathrm{Vect}(A)$ et $\mathrm{Vect}(B)$.

(iii) C'est une conséquence de (ii).

(iv) Soit $a \in A$ tel que $a \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$. D'après (ii), $\mathrm{Vect}(A \setminus \{a\}) \subset \mathrm{Vect}(A)$. On sait aussi que $\mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$ qui contient $A \setminus \{a\}$ et a par hypothèse, donc il contient $\mathrm{Vect}(A)$.

Remarque : en général, on a $\mathrm{Vect}(A \cap B) \neq \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$ (prendre par exemple $A = \big\{(1,0)\big\}$ et $B = \big\{(2,0)\big\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

III – Familles remarquables de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Famille libre, famille génératrice

Définition 6 (famille libre, famille génératrice, base) Soit $\mathscr{F} = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que :

- ⋆ $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E si tout vecteur de E s'exprime comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille, c'est-à-dire que :

$$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

- ⋆ $\mathscr{F}$ est une famille libre si pour tout famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle de scalaires, on a :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i \Longrightarrow (\forall i \in I,\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}})$$

- ⋆ $\mathscr{F}$ est une base de E si elle est libre et génératrice de E.

Remarque : si un vecteur u de E s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$ et si $\mathscr{F}$ est libre, alors cette décomposition est unique. En effet, s'il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tels que :

$$u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$$

alors :

$$0_E = u - u = \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i$$

ce qui implique, par liberté de $\mathscr{F}$, que :

$$\forall i \in I, \qquad \lambda_i = \mu_i$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 8 Une famille $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_i $(i \in I)$.

Démonstration L'existence de la décomposition provient du caractère générateur, l'unicité découle de la liberté et de la remarque précédente. ■

Exemple 8 — La famille $\mathscr{F} = \varnothing$ est libre.
- Si $u \in E$, alors (u) est libre dans E si et seulement si $u \neq 0_E$.
- Si $(u, v) \in E^2$, alors (u, v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires.

✎✎✎ **Exercice 4** 1. La famille de vecteurs $\mathscr{F} = \big((1,2,3),(2,1,3),(1,5,6)\big)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

2. Soit $c : x \longmapsto \cos(x)$, $s : x \longmapsto \sin(x)$ et $t : x \longmapsto x\cos(x)$. Montrer que la famille $\mathscr{G} = (c, s, t)$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles).
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Étudier la liberté de la famille $\mathscr{H} = (\mathrm{I}_2, A, A^2)$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Une solution.

1. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On résout :

$$\alpha(1,2,3) + \beta(2,1,3) + \gamma(1,5,6) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \left\{\begin{array}{lcll} \alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 & \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma & = & 0 & \\ \alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 & \text{(en divisant par 3)} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcll} \alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ -3\beta + 3\gamma & = & 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ -\beta + \gamma & = & 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & -2\beta - \gamma = -3\gamma \\ \beta & = & \gamma \end{array}\right.$$
$$\iff (\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(-3, 1, 1)$$

Par exemple, pour $\gamma = 1$, on a $-3(1,2,3) + (2,1,3) + (1,5,6) = 0_{\mathbb{R}^3}$. La famille $\mathscr{F}$ n'est donc pas libre.

2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha c + \beta s + \gamma t = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha c(x) + \beta s(x) + \gamma t(x) = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma x\cos(x) = 0$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $\alpha = 0$. Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \beta\sin(x) + \gamma x\cos(x) = 0$$

En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta = 0$. Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \gamma x\cos(x) = 0$$

En évaluant enfin en $x = \pi$, on obtient $-\gamma\pi = 0$, c'est-à-dire $\gamma = 0$. Finalement, la famille (c, s, t) est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On résout :

$$\begin{aligned}
\alpha I_2 + \beta A + \gamma A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} &\iff \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha + \beta + 3\gamma & = & 0 \\ 2\beta + 2\gamma & = & 0 \\ \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha + 2\gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \dots \\
&\iff (\alpha, \beta, \gamma) = (-2\gamma, -\gamma, \gamma)
\end{aligned}$$

Par exemple, pour $\gamma = 1$, on a $-2I_2 - A + A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$. La famille (I_2, A, A^2) est donc liée dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

✎✎✎ **Exercice 5** Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivants :

1. $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \,\middle|\, P(0) + P(1) = 0 \right\}$
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & a+b \\ 0 & b+c & 0 \\ a+b & 0 & a+b \end{pmatrix} \,\middle|\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Une solution.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. Alors :

$$\begin{aligned}
P \in A \iff P(0) + P(1) = 0 \iff a + b + 2c = 0 &\iff a = -b - 2c \\
&\iff P = (-b - 2c)X^2 + bX + c \\
&\iff P = b(X - X^2) + c(1 - 2X^2) \\
&\iff P \in \operatorname{Vect}(X - X^2, 1 - 2X^2)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$A = \operatorname{Vect}(X - X^2, 1 - 2X^2)$$

La famille $(X - X^2, 1 - 2X^2)$ est génératrice de A. Montrons maintenant que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
\alpha(X - X^2) + \beta(1 - 2X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} &\iff \beta + \alpha X + (-\alpha - 2\beta)X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccc} \beta & = & 0 \\ \alpha & = & 0 \\ -\alpha - 2\beta & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

car la famille $(1, X, X^2)$ est libre. On a donc $\alpha = \beta = 0$. Ainsi, la famille $(X - X^2, 1 - 2X^2)$ est libre. Finalement, cette famille est une base de A.

2. On a :

$$\begin{aligned}
B &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{car} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En posant $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la famille (M, N) est génératrice de B. Elle est de plus libre. En effet, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\alpha M + \beta N = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = 0$$

Une base de B est donc la famille (M, N).

Vocabulaire : une famille qui n'est pas libre est aussi dite *liée*. Ainsi, $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in I} \in E^I$ est liée si et seulement s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que :

- $\exists\, i_0 \in I,\ \lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$;
- $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$. Ceci revient à dire que :

$$e_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} \lambda_i e_i$$

Ainsi, une famille est liée si et seulement s'il existe un vecteur de la famille qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Exemple 9 Toute famille de vecteurs de E qui comporte le vecteur nul est liée.
En effet, on a $1_{\mathbb{K}} \cdot 0_E = 0_E$ et $1_{\mathbb{K}} \neq 0_E$, d'où le résultat.

Définition 7 (coordonnées d'un vecteur dans une base) Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et $u \in E$. On appelle coordonnées des vecteurs de u dans la base $\mathscr{B}$ l'unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que :

$$u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

2) Bases des espaces vectoriels classiques

(a) Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ où :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad e_i = (\delta_{i,j})_{j\in[\![1,n]\!]}$$

est une base de E, appelée *base canonique,* de $\mathbb{K}^n$.

(b) Espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i^{e} ligne et j^{e} colonne qui vaut 1. On remarque que :

$$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\big(\{\mathrm{E}_{i,j} \mid (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]\}\big)$$

On vérifie facilement la liberté de la famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. Cette famille est donc une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(c) Espaces de polynômes

La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique de* $\mathbb{K}[X]$. De même, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. en particulier, on a l'égalité :

$$\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$$

Proposition 9 Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille $(P_i)_{i\in I}$ (où I est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$) de polynômes de degrés deux à deux distincts (on dit que la famille est *échelonnée en degré*) est une famille libre.

Démonstration Pour tout $i \in I$, posons $d_i = \deg(P_i)$. Soit $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \in \mathbb{K}^n$ une famille de scalaires telle que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} P_{i_k} = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Sans perte de généralité, quitte à renuméroter, on peut supposer que :

$$\deg(P_{i_1}) < \deg(P_{i_2}) < \cdots < \deg(P_{i_n})$$

On veut montrer que :

$$\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_n} = 0_{\mathbb{K}}$$

Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, on peut définir l'entier :

$$i_0 = \max \left\{ k \in [\![1, n]\!] \,\middle|\, i_k \neq 0 \right\}$$

On a alors :

$$\lambda_{i_{i_0}} P_{i_0} = \sum_{k=1}^{i_0 - 1} \lambda_{i_k} P_{i_k}$$

ce qui est absurde puisque la polynôme de gauche est $i_0 \in \mathbb{N}$, tandis que celui de droite est de degré au plus $i_0 - 1 < i_0$. ■

Exemple 10 La famille $1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

✎✎✎ **Exercice 6** La famille $\mathscr{F} = (X, X^2+1, -X^3+1, 2)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

3) Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 10 (propriétés des familles libres) Soit $\mathscr{F}$ une famille libre de vecteurs de E.

(i) Toute famille $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ est libre.

(ii) **Ajout d'un vecteur :** si $x \in E$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$, alors la famille $A \cup \{x\}$ est libre.

Démonstration (i) Raisonnons par l'absurde. Si $\mathscr{G}$ est liée, alors il existe un vecteur de $\mathscr{G}$ qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille. A fortiori, la famille $\mathscr{F}$ est liée, ce qui est absurde.

(ii) Soit $x \in E \setminus \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Montrons que $A \cup \{x\}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque nulle de scalaire et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i + \mu x = 0_E$$

Si $\mu \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors on obtient que x est combinaison linéaire des vecteurs e_i $(i \in I)$, ce qui est absurde. Ainsi, $\mu = 0_{\mathbb{K}}$, et on conclut en utilisant la liberté de $\mathscr{F}$. ■

Proposition 11 Soit $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.

(i) Toute famille $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$ est génératrice de E.

(ii) Soit $x \in E$ tel que $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F} \setminus \{x\})$. Alors $\mathscr{F} \setminus \{x\}$ est une famille génératrice de E.

Démonstration C'est une conséquence directe des propriétés de « Vect ». ■

IV – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E, F deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Somme de sous-espaces vectoriels

On pose :

$$F + G = \{x + y \,|\, (x, y) \in F \times G\}$$

✎✎✎ **Exercice 7** Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Problème : en général, $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel ; par contre, $\mathrm{Vect}(F \cup G)$ en est un. Le résultat suivant décrit cet espace vectoriel.

Proposition 12 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$$

Démonstration On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cup G \subset H$. Pour tout $(x, y) \in F \times G$, on a $(x, y) \in (F \cup G)^2 \subset H^2$, et comme H est un espace vectoriel, on a $x + y \in H$. Ainsi, $F + G \subset H$. Donc :

$$F + G \subset \bigcap_{H \text{ sev de } E F \cup G \subset H} H = \mathrm{Vect}(F \cup G)$$

($\supset$) Comme $0_E \in F \cap G$, on a clairement $F \cup G \subset F + G$. Comme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, on a nécessairement $\mathrm{Vect}(F \cup G) \subset F + G$.

On a donc bien l'égalité annoncée. ■

Exemple 11 Dans $\mathbb{K}^2$:

(⋆ $\mathrm{Vect}((0, 1)) + \mathrm{Vect}((1, 0)) = \mathbb{K}^2$;

(⋆ $\mathrm{Vect}((0, 1)) + \mathrm{Vect}((0, -1)) = \mathscr{D}_{(0,1)}$.

2) Somme directe

Définition 8 (somme directe de deux sous-espaces) On dit que F et G sont *en somme directe* si :

$$\forall z \in F + G,\ \exists\,(x, y) \in F \times G,\ z = x + y$$

L'ensemble $F + G$ est alors noté $F \oplus G$.

Remarque : F et G sont en somme directe si et seulement si tout élément de $F + G$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Le résultat suivant permet en pratique de montrer que deux sous-espaces sont en somme directe.

Proposition 13 Les sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que E et F sont en somme directe. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a clairement l'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap G$. Soit maintenant $x \in F \cap G$. On a :

$$x = x + 0_E = 0_E + x$$

On vient de décomposer x de deux manières comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Par unicité de la décomposition, on a nécessairement $x = 0_E$. Ainsi, $F \cap G \subset \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Soit $z \in F + G$. On suppose qu'il existe $(x, x') \in F^2$ et $(y, y') \in G^2$ tels que :

$$z = x + y = x' + y'$$

Alors :

$$x - x' = y' - y \in F \cap G$$

car F et G sont des espaces vectoriels. Ainsi, $x = x'$ et $z = z'$, donc F et G sont en somme directe. ■

Exemple 12 Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les espaces $F = \text{Vect}(\cos)$ et $G = \text{Vect}(\sin)$ sont en somme directe.

En effet, si $f \in \text{Vect}(\cos) \cap \text{Vect}(\sin)$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda \cos = \mu \sin$ et alors $\lambda = f(0) = 0$ donc $f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.

3) Sous-espaces supplémentaires

Définition 9 Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.

Remarque :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Exemple 13 Soient u et v deux vecteurs non colinéaires de E. Alors $\mathscr{P}_{u,v} = \mathscr{D}_u \oplus \mathscr{D}_v$.

On vérifie effectivement que $\mathscr{P}_{u,v} = \mathscr{D}_u + \mathscr{D}_v$ et que $\mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v = \{0_E\}$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1,1)) \oplus \text{Vect}((0,1))$.

✎✎✎ **Exercice 8** Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note F l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et G celui des fonctions impaires.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$$

1. évident
2. On peut obtenir la décomposition de $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en raisonnant par analyse-synthèse. Posons

$$g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Alors il est clair que $f = g + h$ et on vérifie facilement que g est paire et que h est impaire. Ainsi, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset F + G$ et l'inclusion réciproque est évidente.
Si f est paire et impaire, on obtient facilement que $f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, d'où la somme directe.