Analyse asymptotique

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Comparaison de fonctions

On rappelle que si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on appelle voisinage de a dans $\mathbb{R}$ tout intervalle de la forme :
- $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ si $a \in \mathbb{R}$;
- $]M, +\infty[$ si $a = +\infty$;
- $]-\infty, M[$ si $a = -\infty$.

L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathscr{V}(a)$.

Dans toute cette section :
- I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$;
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un élément de I ou une borne de I ;
- $f, g, h, k : D \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions.

1) Négligeabilité et domination

Définition 1 (négligeabilité, domination) On dit que :
- ⋆ f est *négligeable devant g au voisinage de a* s'il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ et $h : I \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f = gh$ dans $I \cap V$.
  On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.
- ⋆ f est *dominée par g au voisinage de a* s'il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ et une fonction bornée $h : I \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f = gh$ dans $I \cap V$.
  On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.

Remarques : il est clair que, si la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de a, alors
- ⋆ $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \iff \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$;
- ⋆ $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}(g(x)) \iff \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
- ⋆ $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(1)$.
  Ici, $o(1)$ est une fonction définie au voisinage de a, de limite nulle en a.

Exemple 1 — $x^2 - 1 \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(x^3)$
- $\ln(x) \underset{x \to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $\sin(x) \underset{x \to 2}{=} \mathcal{O}(1)$
- Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, si $\alpha < \beta$, alors $x^\beta \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}(x^\alpha)$ et $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(x^\beta)$.

Proposition 1 (*i*) **Transitivité des relations $\mathcal{O}$ et o** : si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ (même propriété pour $\mathcal{O}$).

(*ii*) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\lambda g(x))$ et $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ (même propriété pour $\mathcal{O}$).

(*iii*) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ (même propriété pour $\mathcal{O}$).

(*iv*) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(k(x))$, alors $f(x)g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x)k(x))$.
De même, si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)h(x))$.

(*v*) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.

Démonstration (*i*) Faisons la preuve pour la négligeabilité. Il existe un voisinage V de a et des fonctions $\varepsilon, \eta : V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en a telles que :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \eta(x)h(x)$$

Ainsi :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad f(x) = \varepsilon(x)\eta(x)h(x)$$

et la fonction $\varepsilon\eta$ tend vers 0 en a donc $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$.

(*ii*) On sait qu'il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ et $\varepsilon : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad f(x) = \varepsilon(x)g(x)$$

donc :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad \lambda f(x) = \lambda\varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{g(x)}{\lambda}\lambda g(x)$$

Comme les fonctions $\lambda\varepsilon$ et $\dfrac{\varepsilon}{\lambda}$ tendent vers 0 en a, on a $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\lambda g(x))$ et $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.

(*iii*) Avec les mêmes notations, on a :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad f(x) + g(x) = (\varepsilon(x) + \eta(x))h(x)$$

avec $\varepsilon(x) + \eta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, d'où la relation annoncée.

(*iv*) On a cette fois :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad f(x)g(x) = (\varepsilon(x)\eta(x))h(x)k(x)$$

avec $\varepsilon(x)\eta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, d'où la relation annoncée. La deuxième relation s'obtient de la même manière.

(*v*) En effet, si la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a, elle est en particulier bornée au voisinage de a. ■

Exemple 2 1. On a $x^3 \underset{x\to 0}{=} x^2$ et $x^2 \underset{x\to 0}{=} x$ et, effectivement, $x^3 \underset{x\to 0}{=} x$.

2. Admettons que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}(x)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$, alors :

$$\mathrm{e}^x \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x) + 2x\,\mathrm{o}(x) + \mathrm{o}(x) \times \mathrm{o}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x) + \mathrm{o}(x^2) + \mathrm{o}(x^2) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$$

2) Équivalence

Définition 2 (fonctions équivalentes) On dit que f est *équivalente à g en a* s'il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ et $\lambda : I \cap V \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f = \lambda g$ dans $I \cap V$ et $\lambda(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.
On écrit alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Remarques :

- Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$
- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.
- Dire que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ signifie que la fonction f est identiquement nulle au voisinage de a. En pratique, les fonctions manipulées ne seront pas nulles, donc il ne faudra jamais écrire cette équivalence.

Exemple 3 $x^3 + x^2 + 3 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$ et $x^3 + x^2 + 3 \underset{x\to 0}{\sim} 3$

Proposition 2 On a :
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x))$$

Démonstration On utilise la définition de l'équivalence de f et g :
$$\begin{aligned}
f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) &\iff \exists V \in \mathscr{V}(a),\ \exists \lambda : V \longrightarrow \mathbb{R},\ \begin{cases} \forall x \in V \setminus \{a\},\ f(x) = \lambda(x)g(x) \\ \lambda(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \end{cases} \\
&\iff \exists V \in \mathscr{V}(a),\ \exists \lambda : V \longrightarrow \mathbb{R},\ \begin{cases} \forall x \in V \setminus \{a\},\ f(x) = g(x) + (\underbrace{\lambda(x) - 1}_{=\varepsilon(x)})g(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases} \\
&\iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x))
\end{aligned}$$
■

Exemple 4 Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \ell + \mathrm{o}(1)$.

Proposition 3 La relation d'équivalence est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

Démonstration

- **Réflexivité :** on a clairement $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ (il suffit d'écrire $f = 1 \times 1$ et la fonction $x \longmapsto 1$ tend vers 1 en a).
- **Symétrie :** supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Alors il existe un voisinage V de a et une fonction $\lambda : V \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :
$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad f(x) = \lambda(x)g(x)$$
et $\lambda(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. Il existe donc un voisinage $W \subset V$ de a dans lequel λ ne s'annule pas, et on peut écrire :
$$\forall x \in W \setminus \{a\}, \qquad g(x) = \lambda(x)^{-1}g(x),$$
avec $\lambda(x)^{-1} \xrightarrow[x\to a]{} 1$. Ainsi, $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
- **Transitivité :** supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$. Il existe alors $V \in \mathscr{V}(a)$ et $\lambda, \mu : V \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions qui tendent vers 1 en a telles que :
$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad f(x) = \lambda(x)g(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mu(x)h(x),$$
ce qui implique que :
$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad f(x) = \lambda(x)\mu(x)h(x)$$
Comme de plus $\lambda(x)\mu(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1^2 = 1$, on a bien $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

Donc $\underset{x\to a}{\sim}$ est une relation d'équivalence. ■

Proposition 4 (compatibilité des équivalents avec la multiplication et le quotient) On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$. Alors :

(*i*) $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)k(x)$;

(*ii*) $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$ si f ne s'annule pas au voisinage de a ;

(*iii*) $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{k(x)}$ si h ne s'annule pas au voisinage de a ;

(*iv*) $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$;

(*v*) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x)^n \underset{x\to a}{\sim} g(x)^n$

Démonstration Il suffit d'écrire la définition. ■

Attention : la relation $\underset{x\to a}{\sim}$ n'est pas compatible avec l'addition (/soustraction) ! Par exemple, si $f : x \longmapsto -x + x^2$ et $g : x \longmapsto x$, alors il est clair que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$, $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, mais on ne peut pas écrire que $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$ puisque $f + g$ n'est pas nulle au voisinage de 0.

Proposition 5 (limite et signe) On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

(*i*) Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

(*ii*) Si g est à valeurs positives au voisinage de a, alors f est à valeurs positives au voisinage de a.

Démonstration (*i*) On sait qu'il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ et une fonction $\lambda : I \cap V \longrightarrow \mathbb{K}$ qui tend vers 1 en a tels que :

$$\forall x \in I \cap V, \qquad f(x) = \lambda(x)g(x)$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \lambda(x)g(x) = 1 \times \ell = \ell$$

(*ii*) Quitte à remplacer f par -1, on peut supposer que g est à valeurs positives au voisinage de a.

— Il existe un voisinage V_1 de a tel que $g \geqslant 0$ dans V_1.

— Par ailleurs, il existe $V_2 \in \mathscr{V}(a)$ et une fonction $\lambda : I \cap V_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f = \lambda g$ dans $I \cap V_2$, avec $\lambda(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

— La dernière limite entraîne l'existence d'un voisinage V_3 de a tel que $\lambda \geqslant 0$ dans V_3.

En posant $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ (voisinage de a inclus dans V_1, V_2 et V_3), on a :

$$\forall x \in I \cap V, \qquad f(x) = \lambda(x)g(x) \geqslant 0,$$

ce qu'il fallait établir. ■

✎✎✎ **Exercice 1 (vrai ou faux ?)** Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, a-t-on nécessairement $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$?

Le résultat suivant est très utilisé en pratique.

Proposition 6 (principe de substitution) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si φ est une fonction définie au voisinage d'un point $b \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim_{x\to b} \varphi(x) = a$, alors :

$$f(\varphi(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(\varphi(x))$$

Démonstration Par hypothèse, il existe un voisinage V de a et une fonction $\lambda : I \cap V \longrightarrow \mathbb{K}$ qui tend vers 1 en a telle que $f = \lambda g$ dans $I \cap V$. Par ailleurs, par définition de la limite, il existe $W \in \mathscr{V}(b)$ tel que $\varphi(W) \subset I \cap V$), d'où le résultat. ■

Remarque : il est interdit de composer *à gauche* avec les équivalents. Par exemple, $x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ mais on ne peut pas écrire que $\mathrm{e}^{x+1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{x}$.

✎✎✎ **Exercice 2** Déterminer la limite $\ell = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\sin(\mathrm{e}^{-x})}$.

Proposition 7 (lien avec $\mathcal{O}$ et o) (*i*) Si $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ (même propriété en remplaçant o par $\mathcal{O}$).

(*ii*) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.

Démonstration (*i*)

(*ii*)

3) Équivalents usuels

Proposition 8 (équivalents usuels) On dispose des équivalents suivants en 0 :

(*i*) $\mathrm{e}^{x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$

(*ii*) $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

(*iii*) $(1 + x)^{\alpha} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et, en particulier, $\sqrt{1 + x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$

(*iv*) $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

(*v*) $1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

(*vi*) $\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

(*vii*) $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

(*viii*) $\mathrm{th}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

(*ix*) $\arcsin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

(*x*) $\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

Démonstration Hormis les points (*v*) et (*vii*), tous les équivalents découlent de la dérivabilité en 0 de la fonction usuelle mise en jeu. Par exemple pour (*iii*), si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction $f : x \longmapsto (1 + x)^{\alpha}$ est dérivable en 0 (car dérivable sur $]-1, +\infty[$) et :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(1 + x)^{\alpha} - 1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f'(0) = \alpha$$

d'où l'équivalent annoncée. Pour le point (*v*), on a :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} 2\frac{x^2/4}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On procède de la même manière pour le point (*vii*). ■

✎✎✎ **Exercice 3** Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0} \sin(x)\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\cos(x)-1} \qquad \text{et}$$

Proposition 9 (théorème des gendarmes pour les équivalents) On suppose ici que les fonctions f, g et h sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, si :

- ⋆ $\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$;
- ⋆ $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

Alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

Démonstration Pour tout $x \in I$, on a en divisant par $f(x) > 0$ dans les inégalités :

$$\forall x \in I, \qquad 1 \leqslant \frac{g(x)}{f(x)} \leqslant \frac{h(x)}{f(x)}$$

d'où le résultat d'après le théorème des gendarmes. ■

Exemple 5 Considérons une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0, \qquad x \leqslant f(x) \leqslant x + \sqrt{x} - \ln(x)$$

Comme $x + \sqrt{x} - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, le résultat précédent implique que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

4) Croissances comparées

On peut reformuler les croissances comparées à l'aide de la négligeabilité.

Proposition 10 Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.

- ⋆ Au voisinage de $+\infty$:

$$\ln(x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^\beta) \qquad \text{et} \qquad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\gamma x})$$

- ⋆ Au voisinage de 0^+ :

$$x^\beta \underset{x\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln(x)^\alpha}\right)$$

II – Développements limités

Dans cette partie, on considère $a \in \mathbb{R}$ et f est une fonction définie au voisinage de a.

1) Définition

Définition 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de a* s'il existe $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k \underset{a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0$$

On note alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x_a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$ est appelé la partie régulière du DL de f.

Notation. On écrira « f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ » pour dire que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a.

Exemple 6

1. Exemple de $\mathrm{DL}_1(0)$: $1 - x + x^2 \underset{x \to 0}{=} 1 - x + \mathrm{o}(x)$

   Pour obtenir un DL en 0 d'un polynôme, il suffit donc de *tronquer* le polynôme à l'ordre voulu.
2. Exemple de $\mathrm{DL}_1(1)$: $2 + x \underset{1}{=} 3 + (x-1) + \mathrm{o}(x-1)$.
3. Parmi les DL à connaître, le plus « simple » est le suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

   Soient en effet $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{1-x} + \mathrm{o}(x^n)$$

Remarques.

- ⋆ L'intérêt est d'approximer la fonction au voisinage d'un point par un polynôme.
- ⋆ Pour $a = 0$, dire que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ signifie qu'il existe $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

- ⋆ En posant $h = x - a$, alors on peut se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \longmapsto f(a+h)$:

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \mathrm{o}(h^n)$$

  Remarquons de plus que si $p = \min\{k \in \mathbb{N} \,|\, a_k \neq 0\}$ (si p existe), alors :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} h^p(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + \mathrm{o}(h^{n-p}) \underset{h \to 0}{\sim} a_p h^p,$$

  ce qui nous permet de déterminer le signe de f au voisinage de 0.

Exemple 7 Supposons que $f(x) \underset{x \to 2}{=} 2(x-2)^2 + \mathrm{o}(x-2)^2$, alors :

$$f(x) \underset{x \to 2}{\sim} 2(x-2)^2$$

et donc f est positive au voisinage de 2, ce qui signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$.

✎✎✎ **Exercice 4** 1. En utilisant l'équivalent usuel $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, montrer qu'un $\mathrm{DL}_1(0)$ de la fonction sinus est $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$.

2. Trouver de la même manière un $\mathrm{DL}_1(0)$ de la fonction exponentielle.

2) Premières propriétés

Proposition 11 (unicité des coefficients) Si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors les coefficients de la partie régulière sont uniquement déterminés.

Démonstration Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux familles distinctes $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telles que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

Par soustraction, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^k \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}((x-a)^n)$$

Comme les deux familles sont distinctes, on peut définir $k_0 = \min\left\{k \in [\![0, n]\!] \,\middle|\, a_k \neq b_k\right\}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^k \underset{x\to a}{\sim} (a_{k_0} - b_{k_0})(x-a)^{k_0}$$

et alors $(a_{k_0} - b_{k_0})(x-a)^{k_0} \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$, ce qui est absurde. En effet, on bien le quotient tend vers $a_{k_0} - b_{k_0}$ (dans le cas où $k_0 = n$), ou bien le quotient n'admet pas de limite en a. ■

Proposition 12 Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si et seulement si f est continue en a ;

(ii) f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a.

Démonstration (i) Cette propriété découle de la définition de la continuité.

(ii) Cette propriété a été démontrée dans le chapitre sur la dérivation. ■

Remarque : cette propriété est fausse pour les ordre supérieurs. Considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \in \mathbb{R}^*$. Alors il est clair que f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ qui est $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$. Par contre, f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En effet, on peut montrer que f' n'est pas dérivable en 0.

Proposition 13 Soit f une fonction définie au voisinage de 0 admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ (où $n \in \mathbb{N}$).

(i) Si f est paire, alors la partie régulière du DL ne contiennent que des monômes de degrés pairs.

(ii) Si f est impaire, alors la partie régulière du DL ne contiennent que des monômes de degrés impairs.

Démonstration Supposons que f soit paire et notons :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f. Par composition des limites, on peut écrire que :

$$f(x) = f(-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

et donc, par unicité des coefficients d'un développement limité, on obtient que $a_k = 0$ si $k \in [\![0, n]\!]$ est un entier impair. C'est le même raisonnement dans le cas impair. ■

Proposition 14 (troncature) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f admet le $\mathrm{DL}_n(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big),$$

alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la fonction f admet le $\mathrm{DL}_p(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^p\big),$$

Démonstration Il suffit de remarquer que :

$$\sum_{k=p+1}^{n} a_k (x-a)^k \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^p\big)$$

Exemple 8 Par exemple, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - x^2 + 4x^3 + \mathrm{o}(x^5)$, alors le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f est $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

3) Formule de Taylor-Young

(a) Le théorème

On sait que, si une fonction admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors ce développement est uniquement déterminé. Le résultat suivant précise la valeur des coefficients et justifie l'existence du DL lorsque la fonction est suffisamment régulière.

Théorème 1 (formule de Taylor-Young) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui est donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!} (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

Démonstration Elle est admise à ce stade. On la justifiera à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral. ■

Remarque : la translation $x = a + h$ permet d'écrire le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \longmapsto f(a+h)$ suivant :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!} h^k + \mathrm{o}(h^n)$$

(b) Les développements limités usuels en 0

Les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de dérivabilité, on peut donc écrire des DL à tout ordre. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

- ⋆ On sait déjà que :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

De la même façon, on peut montrer que :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

- ⋆ Considérons la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(0) = f(0) = 1$ donc (formule de Taylor-Young) :

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

- ⋆ En considérant les dérivées successives ainsi que la formule de Taylor-Young, on peut aussi obtenir les développements limités suivants (à connaître) :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$$

et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k\,!} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

et :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

et :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

et :

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

et :

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

et :

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

et :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$

Remarque : en tronquant à l'ordre 1 ou 2 les développements limités, on retrouve les équivalents usuels. Par exemple, $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}(x)$, ce qui signifie exactement que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

4) Utilité des développements limités

Les développements limités permettent de connaître avec précision le comportement d'une fonction au voisinage d'un point. Il sont utilisés lorsque les méthodes standards ne permettent pas de conclure (par exemple, pour un calcul de limite, lorsque les méthodes usuelles (opérations sur les limites, *etc*) ou les équivalents ne suffisent pas).

(a) Calculs de limites

Exemple 9 Déterminons la limite $\ell = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
On a ici une forme indéterminée mais l'équivalent usuel $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ nous donne directement $\ell = 1$.

Voici maintenant un exemple ou un équivalent ne suffit pas.

Exemple 10 Justifions la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ et préciser la valeur de $f'(0)$.
On a :

$$\frac{f(x)-1}{x-0} = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x+\mathrm{o}(x^2)}{x^2} - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(1)$$

On en déduit que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(b) Extremum locaux

On sait que, si une fonction dérivable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum en un point $a \in \mathring{I}$, alors $f'(a) = 0$.
On peut obtenir une réciproque partielle à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2.

Proposition 15 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \lambda(x-a)^2 + \mathrm{o}\big((x-a)^2\big)$$

- ⋆ Si $\lambda > 0$, alors f admet un minimum local en a.
- ⋆ Si $\lambda < 0$, alors f admet un maximum local en a.

Démonstration On a $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} \lambda(x-a)^2$, d'où le résultat puisque le signe de $x \longmapsto \lambda(x-a)^2$ au voisinage de a est déterminé par celui de λ. ∎

Remarque : on ne peut rien conclure avec un $\mathrm{DL}_2(a)$ si $\lambda = 0$.

Exemple 11 Montrons que $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ admet un extremum local en 0.
On écrit le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4) - 1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)$$

Donc :

$$f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{24}$$

donc f présente un minimum local en 0.

5) Opérations sur les développements limités

(a) Linéarité

Proposition 16 Soient f et g admettant des $\mathrm{DL}_n(0)$ tels que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + \mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Alors la fonction $\alpha f+\beta g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par

$$\alpha f(x)+\beta g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\alpha c_k+\beta d_k)x^{+}\mathrm{o}(x^n)$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul. ■

✎✎✎ **Exercice 5** Déterminer un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

(b) Produit

Proposition 17 Soient f et g admettant des $\mathrm{DL}_n(0)$ tels que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + \mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Alors la fonction fg admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par

$$(fg)(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k+\mathrm{o}(x^n) \qquad \text{où } a_k=\sum_{i=0}^{k} c_i d_{k-1}$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul. ■

Exemple 12 Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{1-x}$.

Solution. On sait que

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\mathrm{o}(x^3)$$

donc, en faisant le produit (on tronque toutes les puissances dépassant x^3) :

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\mathrm{o}(x^3)$$

Remarques utiles.

- $\mathrm{o}(x^n)+\mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$
- $x^{n+p} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$
- $\mathrm{o}(x^n)\times\mathrm{o}(x^p) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^{n+p})$
- $x^n\times\mathrm{o}(x^p) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^{n+p})$
- $\mathrm{o}(x^{n+p}) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$

(c) Composition

Proposition 18 Soit f définie sur I contenant 0 admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ et g définie sur J contenant 0 admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$. On suppose que $f(I) \subset J$ et que $f(0) = 0$. Alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Démonstration admis ■

En pratique, pour obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g \circ f$, on trouve le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f ($f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$) et celui de g ($g(u) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k u^k + \mathrm{o}(u^n)$) puis on remplace

$$(g \circ f)(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (f(x))^k + \mathrm{o}(f(x)^n)$$

Exemple 13 Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$.

Solution. On sait que

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{u} \underset{0}{u} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}(u^3)$$

Par conséquent, en substituant à u le $\mathrm{DL}_3(0)$ de sin, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)^3}{6} + \mathrm{o}\left[\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)^3\right] \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

✎✎✎ **Exercice 6** Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \ln(1 + \cos(2x))$.

Solution. On sait que

$$\cos(2x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x^2 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+u) \underset{0}{u} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}(u^3)$$

Donc $1 + \cos(2x) = 2 - 2x^2 + \mathrm{o}(x^3) = 2(1 - x^2 + \mathrm{o}(x^3))$. Ainsi

$$f(x) = \ln 2 + \ln(1 - x^2 + \mathrm{o}(x^3))$$

Posons $g(x) = -x^2 + \mathrm{o}(x^3)$. On a bien $g(0) = 0$. On peut donc composer :

$$\begin{aligned} \ln(1 + g(x)) &\underset{x\to 0}{=} -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{6} + \mathrm{o}\big((-x^2)^3\big) \\ &\underset{x\to 0}{=} -x^2 + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

Finalement, $f(x) = \ln 2 - x^2 + \mathrm{o}(x^3)$.

(d) Quotient

Pour le quotient de deux fonctions $\frac{f}{g}$, on cherchera un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f et un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\frac{1}{g}$ puis on calculera le produit des $\mathrm{DL}_n(0)$ de f et de $\frac{1}{g}$. Pour obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\frac{1}{g}$, on utilisera la composition et le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$.

Exemple 14 Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} + \cos(x)}$.

Solution. On sait que

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)$$

donc $\mathrm{e}^x+\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 2+x+\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$. Par conséquent,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2+x+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1/2}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}(x^3)}$$

Posons $u(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{12}+\mathrm{o}(x^3)$. On a bien $u(0)=0$ donc on peut composer avec le $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\mathrm{o}(u^3)$$

On a

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}(x^3)\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}(x^3)\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}(x^3)\right)^3\right]+\mathrm{o}(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}\right)+\mathrm{o}(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{5}{48}x^3+\mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}$$

6) Primitivation

Proposition 19 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $a\in \overset{\circ}{I}$ et $n\in\mathbb{N}$. On suppose que f admet le $\mathrm{DL}_n(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k+\mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

Alors une primitive F de f sur I admet le $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ suivant :

$$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}+\mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$$

Démonstration La fonction :

$$G : x\in I \longmapsto F(x)-\left(F(a)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}\right)$$

est dérivable sur I et :

$$\forall x\in I, \qquad G'(x)=F'(x)-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)=(x-a)^n\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to a]{} 0$. Soit $x\in I$. La fonction G est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c(x)\in]0,1[$ tel que :

$$G(x)-G(a)=(x-a)G'((x-a)c(x))$$

Alors :

$$F(x)=F(a)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}+(x-a)^{n+1}c(x)^n\varepsilon((x-a)c(x))=\mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$$

d'où le résultat. ■

Exemple 15 Déterminons le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\arctan(x)$ en considérant sa dérivée.
La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On sait que

$$\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

donc

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

Comme arctan est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ telle que $\arctan(0) = 0$, on a

$$\arctan(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}(x^5)$$

✎✎✎ **Exercice 7** Déterminer le DL5(0) de la fonction arcsin.

Une solution.
La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

donc :

$$\arcsin'(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \mathrm{o}(x^4)$$

donc, par intégration :

$$\arcsin(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathrm{o}(x^5)$$

III – Comparaison de suites

On définit les relations de comparaison ($\sim$, o et $\mathcal{O}$) pour les suites (on ne compare des suites qu'au voisinage de $+\infty$). Les propriétés correspondantes sont les mêmes que pour les fonctions. Il suffit d'adapter les démonstrations.

(a) Définitions

Définition 4 (relations $\sim$, o et $\mathcal{O}$) Soit $(u,v) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$. On dit que :

- ⋆ u est *dominée par* v (quand n tend vers $+\infty$), noté $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, s'il existe une suite $w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que :
$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = w_n v_n$$
- ⋆ u est *négligeable devant* v (quand n tend vers $+\infty$), noté $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, s'il existe une suite $w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite 0 telle que :
$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = w_n v_n$$
- ⋆ u est *équivalente à* v (quand n tend vers $+\infty$), noté $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, s'il existe une suite $w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite 1 telle que :
$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = w_n v_n$$

Remarques :

- ⋆ Comme pour les fonctions, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors :
  (i) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
  (ii) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
  (iii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- ⋆ Si $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}^*$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Exemple 16 — $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^3)$;
— $\sin(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$;
— $\dfrac{n^3+1}{n^2+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

(b) Propriétés

Proposition 20 (i) La relation de négligeabilité ou d'équivalence implique la domination.
(ii) La relation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est une relation d'équivalence.
(iii) Si $(u,v) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$, alors :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n)$$

Proposition 21 Soit $(u,v,w,x) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^4$.
(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$ (idem avec $\mathcal{O}$).
(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x_n)$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n x_n)$ (idem avec $\mathcal{O}$).
(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$, alors :
$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n x_n$$
et, si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{w_n}{x_n}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n^k$.

Remarque : on ne peut pas ajouter/soustraire des équivalents, ni composer à gauche par une fonction dans des équivalents.

Proposition 22 Soit $(u,v) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
(i) Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
(ii) Si v est de signe constant à partir d'un certain rang, alors v également (avec le même signe).

Pour terminer, on rappelle les équivalents usuels (version séquentielles des équivalents vus plus haut pour les fonctions).

Proposition 23 (équivalents usuels) Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors :

(i) $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$

(ii) $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $\mathrm{e}^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

(iii) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$

IV – Applications

Les développements limités ont de nombreuses applications ; ils permettent d'étudier en finesse le comportement d'une suite ou d'une fonction notamment.

1) Développement asymptotique d'une fonction

Il s'agit d'obtenir un développement de f au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$. Quand x tend vers l'infini, alors $h = \dfrac{1}{x}$ tend vers 0. On peut commencer par effectuer le développement limité de $f(h)$ au voisinage de 0.

Exemple 17 Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$. Posons $x = \dfrac{1}{h}$. Quand x tend vers $+\infty$, alors h tend vers 0^+. On a

$$f(\frac{1}{h}) = \sqrt{\frac{1}{h^2}+1} - \sqrt{\frac{1}{h^2}-1} = \frac{\sqrt{1+h^2}-\sqrt{1-h^2}}{h}$$

car $\sqrt{h^2} = h$ si $h > 0$. Pour avoir un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f\left(\frac{1}{h}\right)$, il faut avoir un $\mathrm{DL}_4(0)$ au numérateur. On sait que

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+u} &\underset{0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}u^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right.}{6}u^3 + \mathrm{o}(u^3) \\
&\underset{0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \mathrm{o}(u^2)
\end{aligned}$$

donc $\sqrt{1+h^2} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{h^2}{2} - \dfrac{h^4}{8} + \mathrm{o}(h^4)$ (puisque $\lim\limits_{h\to0} h^2 = 0$) et $\sqrt{1-h^2} \underset{0}{=} 1 - \dfrac{h^2}{2} - \dfrac{h^4}{8} + \mathrm{o}(h^4)$. D'où

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{0}{=} \frac{h^2 + \mathrm{o}(h^4)}{h} = h + \mathrm{o}(h^3)$$

Finalement, $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

On utilise des développements limités asymptotiques pour obtenir l'équation de l'asymptote à une courbe et la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote. On cherche alors à écrire $f(x) \underset{\infty}{=} ax + b + \dfrac{c}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La droite d'équation $y = ax+b$ est alors asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de ∞ et le signe de c donne la position de la courbe par rapport à la droite.

Exemple 18 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ présente une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de cette droite par rapport à la courbe.

Solution. Posons $x = \dfrac{1}{h}$ (h tend vers 0^+ quand x tend vers $+\infty$). Alors

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h^3}+1}{\frac{1}{h^2}-1} = \frac{1+h^3}{h^3} \times \frac{h^2}{1-h^2} = \frac{1}{h} \times \frac{1+h^3}{1-h^2}$$

On sait que $\dfrac{1}{1-h^2} \underset{0}{=} 1 + h^2 + \mathrm{o}(h^2)$ donc

$$(1+h^3) \times \frac{1}{1-h^2} \underset{0}{=} (1+h^2)(1+h^2+\mathrm{o}(h^2)) = 1 + h^2 + \mathrm{o}(h^2)$$

Donc

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{0}{=} \frac{1+h^2+\mathrm{o}(h^2)}{h} = h + \frac{1}{h} + \mathrm{o}(h)$$

ce qui donne

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et que la courbe est au-dessus de la droite dans ce voisinage.

2) Développement asymptotique d'une suite d'intégrales

✎✎✎ **Exercice 8** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

1. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Une solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant 1 - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

   d'où le résultat.
2. Une intégration par parties fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

   d'où le résultat.

3) La formule de Stirling

Théorème 2 (formule de Stirling) On a l'équivalent suivant :

$$n\,! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Démonstration résultat admis ■

On peut en déduit un développement asymptotique de $\ln(n\,!)$.

Proposition 24 On a :

$$\ln(n\,!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \mathrm{o}(1)$$

Démonstration D'après la formule de Stirling, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^n\, n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2\pi} > 0$$

Par continuité de la fonction ln en $\sqrt{2\pi}$ et par la caractérisation séquentielle de la continuité, on a :

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^n\, n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^n\, n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \mathrm{o}(1)$$

c'est-à-dire :

$$\ln(n!) + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) = \ln(\sqrt{2\pi}) + \mathrm{o}(1),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

4) Autres applications

Les développements limités permettent également d'obtenir des développements asymptotiques de suites implicites ou de suites récurrentes. On peut également déterminer des développements limités de fonctions réciproques (voir TD).