Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Corps des fractions rationnelles

1) Notion de fraction rationnelle

On sait que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif intègre, mais ce n'est pas un corps (par exemple car X n'admet pas d'inverse dans $\mathbb{K}[X]$). On peut, à partir de cet anneau, construire ce qu'on appelle son *corps des fractions*. Il s'agit de l'*ensemble des fractions rationnelles*, dont la construction est hors programme.

Définition/théorème 1 (le corps $\mathbb{K}(X)$) Il existe un corps, noté $\mathbb{K}(X)$ et appelé corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- ⋆ $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$;
- ⋆ si F est un corps qui contient $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathbb{K}(X) \subset F$.

Un élément de $\mathbb{K}(X)$ est appelé une *fraction rationnelle à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Démonstration admise ■

L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ contient donc notamment :

- ⋆ les polynômes ;
- ⋆ les inverses des polynômes P non nuls, que l'on notera $\dfrac{1}{P}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont donc de la forme $P \times \dfrac{1}{Q}$, avec $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$, ce que l'on notera $\dfrac{P}{Q}$.

Exemple 1 $\dfrac{1}{X} \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{X-1}{X^3} \in \mathbb{K}(X)$, $X^2 + 2022 \in \mathbb{K}(X)$

Définition 1 (représentant d'une fraction rationnelle) On définit l'égalité de deux fractions rationnelles par :

$$\forall P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X],\ \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \iff P_1 Q_2 = P_2 Q_1$$

On dit que $\dfrac{P_1}{Q_1}$ et $\dfrac{P_2}{Q_2}$ sont deux représentants d'une même fraction rationnelle.

Exemple 2 $\dfrac{X}{X^2+1}$, $\dfrac{2X}{2X^2+2}$ et $\dfrac{X^2}{X^3+X}$ sont trois représentants d'une même fraction rationnelle.

Proposition 1 (représentant irréductible d'une fraction rationnelle, admise) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. À constante multiplicative près, il existe un unique couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que :

- ⋆ $P \wedge Q = 1$;
- ⋆ $F = \dfrac{P}{Q}$.

Cette fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est appelée le représentant irréductible de F.

Démonstration C'est la même démonstration que pour le représentant irréductible d'un nombre rationnel. ■

Exemple 3 Le représentant irréductible de $F(X) = \dfrac{X-1}{X^2-3X+2}$ est $\dfrac{1}{X-2}$.

Définition 2 (règles de calculs dans $\mathbb{K}(X)$) On définit dans $\mathbb{K}(X)$ la somme $+$, le produit $\times$ et la multiplication par un scalaire par les formules suivantes. Pour tous $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$, pour tous $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2} \qquad \text{et} \qquad \lambda\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\lambda P_1}{Q_1}$$

Remarque : on peut vérifier que les résultats de ces opérations ne dépendent pas des représentants choisis et que $\mathbb{K}(X)$.

2) Degré d'une fraction rationnelle

La notion de degré d'une fraction rationnelle étend celle déjà vue pour les polynômes.

Proposition/définition 1 Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle *degré de* F, notée $\deg(F)$, l'élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ suivant :

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$$

Démonstration Pour que la définition soit cohérente, il faut vérifier que la différence des degrés ne dépend pas du représentant $\dfrac{P}{Q}$ choisi. Supposons que l'on dispose d'une autre écriture $F = \dfrac{R}{Q}$. Alors $PS = QR$ et donc (propriété des degrés dans $\mathbb{K}[X]$) :

$$\deg(P) + \deg(S) = \deg(Q) + \deg(R) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \deg(P) - \deg(Q) = \deg(R) - \deg(S)$$

La notion de degré, pour une fraction rationnelle, est donc bien définie. ■

Remarques :

- ⋆ Le degré de F vaut $-\infty$ si et seulement si F est la fraction rationnelle nulle.
- ⋆ Une fraction rationnelle de degré 0 peut ne pas être constante. Par exemple, $\deg\left(\dfrac{X}{X+1}\right) = 0$.
- ⋆ On a :

$$\deg(F) \leqslant 0 \iff \deg(P) \leqslant \deg(Q)$$

Exemple 4 $\deg\left(\dfrac{X^2+1}{X^3}\right) = -1$

Les propriétés sur les degrés sont les mêmes que dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 2 (propriétés du degré dans $\mathbb{K}(X)$) Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$. Alors :

- ⋆ $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg(F), \deg(G))$ avec égalité si $\deg(F) \neq \deg(G)$;
- ⋆ $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$.

Démonstration Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ et $G = \dfrac{R}{S}$ deux éléments de $\mathbb{K}(X)$.

- ⋆ Par définition de l'addition dans $\mathbb{K}(X)$, on a $F + G = \dfrac{PS+QR}{QS}$ donc :

$$\begin{aligned}
\deg(F+G) &= \deg(PS+QR) - \deg(QS) \\
&\leqslant \max(\deg(PS), \deg(QR)) - \deg(Q) - \deg(S) \qquad \text{(opérations sur les degrés dans } \mathbb{K}[X]) \\
&= \max(\deg(P)+\deg(S), \deg(Q)+\deg(R)) - \deg(Q) - \deg(S) \\
&= \max(\deg(P)-\deg(Q), \deg(R)-\deg(S)) \\
&= \max(\deg(F), \deg(G))
\end{aligned}$$

  Si $\deg(F) \neq \deg(G)$, *i.e* si $\deg(PS) \neq \deg(QR)$, alors on a égalité (d'après le cas d'égalité dans $\mathbb{K}[X]$).

- ⋆ Par définition du degré de la fraction rationnelle $FG = \dfrac{PR}{QS}$, on a :

$$\begin{aligned}
\deg(FG) = \deg(PR) - \deg(QS) &= \deg(P) + \deg(R) - (\deg(Q) + \deg(S)) \\
&= \deg(P) - \deg(Q) + \deg(R) - \deg(S) \\
&= \deg(F) + \deg(G)
\end{aligned}$$

■

3) Racines et pôles

Définition 3 (racines, pôles) Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible. On appelle :

- ⋆ *racines* de F les racines de P dans $\mathbb{K}$;
- ⋆ *pôles* de F les racines de Q dans $\mathbb{K}$.

La multiplicité d'une racine (respectivement d'un pôle) de F est définie comme étant sa multiplicité en tant que racine du polynôme P (respectivement de Q).

Remarques :

- ⋆ Il est important que la fraction rationnelle soit écrite sous forme irréductible. Par exemple, 0 n'est ni un pôle, ni une racine, de la fraction rationnelle $F = \dfrac{X(X+1)}{X}$ (en fait, F n'a pas de pôle et -1 et sa seule racine).
- ⋆ Toute fraction rationnelle admet un nombre fini de pôles.
- ⋆ Toute fraction rationnelle *non nulle* admet un nombre fini de racines.

Exemple 5 Soit $F = \dfrac{X}{(X^2+1)^2}$.

* ⋆ Sur $\mathbb{C}$, les pôles de F sont $-i$ et i, et 0 est l'unique racine de F. Les pôles sont doubles, la racine est simple.
* ⋆ Sur $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle F n'admet pas de pôle (et 0 pour unique racine).

De la même manière que pour les fonctions polynomiales, on peut définir la notion de *fonction rationnelle.*

Définition 4 (fonction rationnelle) Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On note $\mathrm{Pol}(F)$ l'ensemble des pôles de F sur le corps $\mathbb{K}$. On appelle *fonction rationnelle* associée à F la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \setminus \mathrm{Pol}(F) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{P(x)}{Q(x)} \end{array} \right.$$

Remarque : ici, la fonction rationnelle f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{K} \setminus \mathrm{Pol}(F)$.

II – Éléments simples

1) Définitions

Définition 5 (élément simple sur $\mathbb{K}$) On appelle *élément simple* sur $\mathbb{K}$ toute fraction rationnelle du type $\dfrac{P}{Q^n} \in \mathbb{K}(X)$ où :

* ⋆ Q est irréductible sur le corps $\mathbb{K}$;
* ⋆ $n \in \mathbb{N}^*$;
* ⋆ $\deg(P) < \deg(Q)$.

Remarque : on connaît les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Ainsi :

* ⋆ sur $\mathbb{C}$, les éléments simples sont les fractions rationnelles de la forme :
$$\frac{\alpha}{(X-\beta)^n}$$
où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$;
* ⋆ sur $\mathbb{R}$, ce sont les fractions de la forme :
$$\frac{\alpha}{(X-\beta)^n} \qquad \text{et} \qquad \frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^n}$$
où $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p^2 - 4q^2 < 0$.

2) Partie entière d'une fraction rationnelle

Proposition/définition 2 (partie entière) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

* ⋆ $\deg(G) < 0$;
* ⋆ $F = E + G$.

Le polynôme E est appelé la *partie entière* de F (on le note parfois $E(F)$).

Démonstration On démontre l'existence et l'unicité séparément.

⋆ **Existence :** il existe $(A,B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$. Ainsi :

$$F = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B} \qquad \text{avec} \qquad \deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0$$

On pose donc $G = \dfrac{R}{B}$.

⋆ **Unicité :** soient $(E_1, G_1), (E_2, G_2) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que :

$$F = E_1 + G_1 = E_2 + G_2 \qquad \text{avec } \deg(G_1) < 0 \text{ et } \deg(G_2) < 0$$

Alors $E_1 - E_2 = G_2 - G_1$. Or :

$$\deg(G_2 - G_1) \leqslant \max(\deg(G_2), \deg(G_1)) < 0$$

Comme $E_1 - E_2 \in \mathbb{K}[X]$, on a aussi $\deg(G_2 - G_1) \in \mathbb{N}\sup\{-\infty\}$ donc $\deg(G_2 - G_1) = -\infty$, c'est-à-dire donc on a nécessairement $G_1 = G_2$ et $E_1 = E_2$. ■

Exemple 6 ⋆ On a $\dfrac{X+1}{X} = 1 + \dfrac{1}{X}$. Comme $\deg\left(\dfrac{1}{X}\right) = -1 < 0$, on a $E\left(\dfrac{X+1}{X}\right) = 1$ par unicité de la partie entière.

⋆ On a $\dfrac{X}{X^2+1} = 0 + \dfrac{X}{X^2+1}$ et $\deg\left(\dfrac{X}{X^2+1}\right) < 0$. donc $E\left(\dfrac{X}{X^2+1}\right) = 0$.

⋆ Déterminons $E(F)$ où $F = \dfrac{2X^2+1}{X+1}$. On a (on effectue la division euclidienne de $2X^2+1$ par $X+1$) :

$$2X^2 + 1 = (2X+2)(X+1) - 3 \qquad \text{donc} \qquad F = 2X + 2 - \frac{3}{X+1}$$

donc $E(F) = 2X + 2$.

3) Décomposition en éléments simples

Les théorèmes suivants, qui assurent l'existence de la « décomposition en éléments simples » de toute fraction rationnelle en précisant leur forme, sont admis. On distingue le cas complexe du cas réel.

(a) Le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Théorème 1 (décomposition en éléments simples, cas complexe) Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle admettant exactement $n \in \mathbb{N}^*$ pôles notés $a_1, \ldots, a_n$ de multiplicités respectives $k_1, \ldots, k_n$. On peut décomposer F d'une unique manière sous la forme :

$$F = E(F) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k_j} \frac{\alpha_{\ell,j}}{(X - a_j)^\ell},$$

les coefficients $\alpha_{\ell,j}$ étant uniquement déterminés.

Exemple 7 Soit $F = \dfrac{X}{(X^2+1)^2} = \dfrac{X}{(X-i)^2(X+i)^2} \in \mathbb{C}(X)$. On a $E(F) = 0$ et, d'après le théorème, il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\beta}{(X-i)^2} + \frac{\gamma}{X+i} + \frac{\delta}{(X+i)^2}$$

Remarque : le cadre le plus simple pour décomposer en éléments simples est celui où tous les pôles de F sont simples. Supposons que :

$$F = \frac{P}{(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et où les nombres complexes $a_1, \dots, a_n$ étant deux à deux distincts. D'après le théorème, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X-a_i}$$

Expliquons comment déterminer simplement λ_1. On multiplie F par $X - a_1$:

$$\frac{P}{(X-a_2)\dots(X-a_n)} = (X-a_1)F = \lambda_1 + (X-a_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{\lambda_i}{X-a_i}$$

En évaluant en a_1, on a donc $\lambda_1 = \dfrac{A(a_1)}{(a_1-a_2)\dots(a_1-a_n)}$.

✎✎✎ **Exercice 1** Décomposer $F = \dfrac{X}{(X-1)(X-2)}$ sur $\mathbb{C}$.

Solution. On sait qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-2}$$

En utilisant la méthode précédente, on trouve $\lambda = -1$ et $\mu = 2$.

Voyons maintenant un exemple avec un pôle multiple.

Exemple 8 Considérons la fraction rationnelle $F = \dfrac{X}{(X-1)(X-2)^2}$. Celle-ci est de degré -2 (donc la partie entière est nulle) avec un pôle simple et un pôle double. On sait qu'il existe $\lambda, \mu, \theta \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-2} + \frac{\theta}{(X-2)^2}$$

- ⋆ La méthode vue plus haut permet de trouver le coefficient relatif au pôle simple ; on obtient $\lambda = 1$.
- ⋆ Ensuite, en multipliant la fraction rationnelle par $(X-2)^2$ et en évaluant en 2, on obtient $\theta = \frac{2}{2-1} = 2$.
- ⋆ Pour obtenir μ, on peut par exemple évaluer en 0. On obtient $\mu = -1$. On peut aussi multiplier F par X et en faisant tendre X vers $+\infty$. On obtient la relation :

$$0 = \lambda + \mu \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mu = -1$$

(b) Le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Théorème 2 (décomposition en éléments simples, cas réel) Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle dont le dénominateur s'écrit :

$$Q = C\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{\alpha_i}\prod_{i=1}^{m}(X^2+p_iX+q_i)^{\beta_i}$$

la décomposition en produit de facteurs irréductibles de Q sur $\mathbb{R}$, où :

- ⋆ $C \in \mathbb{R}$;
- ⋆ les α_i, β_i sont des entiers naturels non nuls ;
- ⋆ les a_i, p_i, q_i sont des réels tels que $p_i^2 - 4q_i < 0$.

Alors on peut décomposer F sous la forme :

$$F = E(F) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\beta_i}\frac{\mu_{i,j}X+\nu_{i,j}}{(X^2+p_iX+q_i)^j}$$

où les nombres réels $\lambda_{i,j}, \mu_{i,j}$ et $\nu_{i,j}$ sont uniquement déterminés.

Exemple 9 Si $F = \dfrac{X^3+4}{(X-a)^2(X^2+pX+q)^2}$ (où $p^2-4q<0$), alors il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{(X-a)^2} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2+pX+q} + \frac{\lambda X+\mu}{(X^2+pX+q)^2}$$

En pratique, on peut commencer par rechercher la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ avant de regrouper les pôles conjugués.

✎✎✎ **Exercice 2** Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :

$$F = \frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}$$

Solution. On a $E(F)=0$. On sait qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2+X+1}$$

En multipliant par $X-1$ et en évaluant en 1, on trouve la valeur de λ. En multipliant par X puis en faisant tendre X vers $+\infty$, on trouve la valeur de β. Pour obtenir γ, on peut par exemple substituer à X la valeur 0. On obtient :

$$\alpha = \frac{1}{3} = -\beta \qquad \text{et} \qquad \gamma = -\frac{2}{3}$$

4) Dérivée logarithmique

Proposition 3 (dérivée logarithmique) Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$. Il existe $C \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$P = C \prod_{i=1}^{n} (X-a_i)^{\alpha_i}$$

Alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{X-a_i}$$

Démonstration On a :

$$P' = C \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X-a_i)^{\alpha_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (X-a_i)^{\alpha_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{X-a_i} \right) P$$

d'où la décomposition annoncée. ■

Remarque : formellement, cela revient à écrire

$$\text{« } \ln(P) = \ln(c) + \sum_{i=1}^{n} k_i \ln(X-a_i) \text{ »}$$

et à dériver, d'où l'intitulé « dérivée logarithmique ».

Exemple 10 On a, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{nX^{n-1}}{X^n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \mathrm{e}^{2ik\pi/n}}$$

III – Intégration de fonctions rationnelles

Pour déterminer une primitive d'une fonction rationnelle, on commencera par décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fonction. Il s'agit ensuite d'intégrer chaque élément simple, à savoir chaque fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{(t-a)^n}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- ⋆ Si $n \geqslant 2$, alors une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est $F : t \longmapsto -\dfrac{1}{(n-1)(t-a)^{n-1}}$
- ⋆ Supposons maintenant que $n = 1$.
  - — Si $a \in \mathbb{R}$, alors une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est $F : t \longmapsto \ln(|t-a|)$.
  - — Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors il existe $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $a = p + iq$ et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{1}{t-p-iq} = \frac{t-p+iq}{(t-p)^2+q^2} = \frac{t-p}{(t-p)^2+q^2} + i\frac{\frac{1}{q}}{\left(\frac{t-p}{q}\right)^2+1}$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$F : t \longmapsto \frac{\ln((t-p)^2+q^2)}{2} + i \arctan\left(\frac{t-p}{q}\right)$$

✎✎✎ **Exercice 3** Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{t^2-1} \, \mathrm{d}t$.

Solution. On a :

$$\frac{X^3}{X^2-1} = \frac{X(X^2-1)+X}{X^2-1} = X + \underbrace{\frac{X}{X^2-1}}_{\text{notée } G}$$

On sait qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $G = \dfrac{\alpha}{X-1} + \dfrac{\beta}{X+1}$ et on trouve que $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$I = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{\ln(1-t)}{2} + \frac{\ln(t+1)}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)-\ln(2)}{2} = \frac{1}{8} - \ln(2) + \frac{\ln(3)}{2}$$