Calcul matriciel et systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n, p, q, r sont des éléments de $\mathbb{N}^*$.

I – Généralités

1) Notion de matrice

Définition 1 (matrice) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

- ⋆ On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute application $M : [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$.
- ⋆ L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Notation : nous représenterons une matrice sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes ; pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, le coefficient situé en position ligne i et en colonne j du tableau correspond à la valeur $M(i, j)$.

Exemple 1 La matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \qquad \text{aussi notée} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est telle que $M(1, 3) = 3$.

Remarque : si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice, les coefficients seront notés $m_{i,j}$ (au lieu de $M(i, j)$) et on écrira $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

✎✎✎ **Exercice 1** Expliciter la matrice $M = (i + j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$.

Vocabulaire :

- ⋆ On appelle *matrice nulle*, notée $0_{n,p}$, l'élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls (on la note simplement 0_n si $n = p$).
- ⋆ Lorsque $n = p$, on parle de matrice *carrée*. L'ensemble des matrices carrées à n lignes est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *diagonale* d'une matrice carrée, la données des coefficients $m_{k,k}$ où $k \in [\![1, n]\!]$.
- ⋆ Tout élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelé une *matrice colonne*.
- ⋆ Tout élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelé une *matrice ligne*.
- ⋆ Soit $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que D est une matrice diagonale si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad i \neq j \implies d_{i,j} = 0$$

Une telle matrice est donc de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & (0) & & d_n \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$$

- ⋆ On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une *matrice scalaire* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$A = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & \lambda \end{pmatrix}$$

  En particulier, on appelle matrice *identité*, notée I_n, la matrice scalaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux valent 1, *i.e.* $I_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$.
- ⋆ On dit que $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad i > j \implies t_{i,j} = 0$$

- ⋆ On définit de la même manière la notion de matrice triangulaire inférieure.

Remarque : les matrices qui sont triangulaires inférieures et supérieures sont les matrices diagonales.

2) Combinaison linéaire de matrices de mêmes tailles

On définit deux lois de composition dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de la manière suivante.

- ⋆ **somme de deux matrices**
  Soient $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $N = (n_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $M + N$ par :

$$M + N = (m_{i,j} + n_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

  La loi + ainsi définie est une loi de composition interne dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est associative, commutative et qui admet la matrice nulle comme élément neutre.

- ⋆ **multiplication d'une matrice par un scalaire**
  Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en posant :

$$\lambda M = (\lambda m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque : toute matrice de la forme $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \cdots + \lambda_\ell N_\ell$ où $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{K}$ et $M_1, \ldots, M_\ell \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée *combinaison linéaire* des matrices $M_1, \ldots, M_\ell$.

3) Matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2 (symbole de Kronecker) Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarques :

- ⋆ $\forall a, b \in \mathbb{N},\ \delta_{a,b} = \delta_{b,a}$
- ⋆ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N},\ \delta_{a,b}\delta_{c,d} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b = c = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Définition 3 (matrice élémentaire) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. On appelle matrice élémentaire d'indices i et j la matrice $E_{i,j}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $E_{i,j} = \big(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\big)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant p}}$.

Par exemple, les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ sont :

$$E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad E_{2,1}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$$

Proposition 1 (les matrices élémentaires engendrent $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) Tout élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'exprime comme combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration Soit $M=(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors on a clairement $A=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}E_{i,j}$, d'où le résultat. ■

4) Produit matriciel

Définition 4 (produit matriciel) Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle *produit de A par B* la matrice $AB=(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}\in\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\qquad c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$$

Remarque : pour calculer le produit matriciel AB, il faut que ce produit soit *compatible* (le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B).

Exemple 2 On a :

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$$

Proposition 2 (produit de deux matrices élémentaires) Soient $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ et $(k,\ell)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]$. Alors :

$$\underbrace{E_{i,j}}_{n\times p}\,\underbrace{E_{k,\ell}}_{p\times q}=\delta_{j,k}\,\underbrace{E_{i,\ell}}_{n\times q}$$

Démonstration Posons $E_{i,j}E_{k,\ell}=(c_{a,b})_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\1\leqslant b\leqslant q}}$. Soit $(a,b)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$. Le coefficient $c_{a,b}$ est égal à :

$$c_{a,b}=\sum_{c=1}^{p}(E_{i,j})_{a,c}(E_{k,\ell})_{c,b}=\sum_{c=1}^{p}\delta_{i,a}\delta_{j,c}\delta_{c,k}\delta_{\ell,b}=\delta_{i,a}\delta_{\ell,b}\sum_{c=1}^{p}\delta_{j,c}\delta_{c,k}$$

puisque $E_{i,j}=(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant\ell\leqslant p}}$ et $E_{k,\ell}=(\delta_{k,\alpha}\delta_{\ell,\beta})_{\substack{1\leqslant\alpha\leqslant p\\1\leqslant\beta\leqslant q}}$. On distingue deux cas.

- ⋆ **Premier cas :** $j\neq k$
  Pour tout $c\in[\![1,p]\!]$, on a $\delta_{j,c}\delta_{c,k}=0$ (car l'un des deux symboles de Kronecker est nul) et alors $c_{a,b}=0$.
- ⋆ **Deuxième cas :** $j=k$
  Alors $\displaystyle\sum_{c=1}^{q}\delta_{j,c}\delta_{c,j}=\delta_{j,j}\delta_{j,j}=1$ et alors $c_{a,b}=\delta_{i,a}\delta_{\ell,b}$.

On en déduit que $c_{a,b}=\delta_{i,a}\delta_{\ell,b}\delta_{j,k}$. Comme $\delta_{i,a}\delta_{\ell,b}=(E_{i,\ell})_{a,b}$ donc on a bien l'égalité $E_{i,j}E_{k,\ell}=\delta_{j,k}E_{i,\ell}$. ■

Proposition 3 (propriétés algébriques du produit matriciel) Le produit matriciel est :

- ⋆ associatif, *i.e.* :

$$\forall (A,B,C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \qquad (AB)C = A(BC)$$

- ⋆ *bilinéaire*, *i.e.* : pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \qquad \text{et} \qquad B(\lambda C + \mu D) = \lambda BC + \mu BD$$

- ⋆ la matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad I_n A = A I_p = A$$

Démonstration ⋆ Soit $(A,B,C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned}\big((AB)C\big)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{q} (AB)_{i,\ell} c_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,\ell}\right) c_{\ell,j} &= \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,\ell} c_{\ell,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} a_{i,k} b_{k,\ell} c_{\ell,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{q} b_{k,\ell} c_{\ell,j}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} (BC)_{k,j} \\ &= \big(A(BC)\big)_{i,j},\end{aligned}$$

ce qui démontre l'associativité du produit matriciel.

⋆ On démontre de manière analogue les deux autres propriétés. ■

Remarque : le produit matriciel n'est pas commutatif. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 4 (effet d'une multiplication par une matrice ligne/colonne) Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$. Alors :

- ⋆ $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A
- ⋆ $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} A$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A
- ⋆ Plus généralement, pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne), alors en notant $C_1, \dots, C_p$ les matrices de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

$$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j \qquad (AX \text{ est une combinaison linéaire des colonnes de } A)$$

Démonstration ⋆ Posons $X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,j} \\ \vdots \\ \delta_{j-1,j} \\ \delta_{j,j} \\ \delta_{j+1,j} \\ \vdots \\ \delta_{p,j} \end{pmatrix}$. Alors $AX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$(AX_j)_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\delta_{k,j} = a_{i,j}$$

Donc $AX_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$ est la j^{e} colonne de A.

⋆ On procède de manière analogue.

⋆ Si $x_1, \ldots, x_p$ sont les coefficients de X, on a $X = \sum_{j=1}^{p} x_j X_j$ (où X_j est la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne j qui vaut 1). Par distributivité du produit matriciel, on a :

$$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j AX_j = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j$$

d'après le premier point. ■

Exemple 3 Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ et si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors $AX = \begin{pmatrix} a+2b+3c \\ d+2e+3f \\ g+2h+3i \end{pmatrix}$.

5) Transposition

Définition 5 (transposée) Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée* de A l'élément de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, noté A^{T}, dont le coefficient situé en position $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$ est $a_{j,i}$. Autrement dit :

$$A^{\mathrm{T}} = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

Exemple 4 ⋆ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

⋆ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 42 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$

Proposition 5 (propriétés de la transposition) Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Alors :

⋆ $(\lambda A + \mu B)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}}$ (*linéarité de la transposition*) ;

⋆ $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$ (la transposition est *involutive*) ;

⋆ $(AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

Démonstration On pose $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$.

★ On a :

$$\begin{aligned}(\lambda A + \mu B)^{\mathrm{T}} = \left((\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\right)^{\mathrm{T}} &= (\lambda a_{j,i} + \mu b_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}\\ &= \lambda (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} + \mu (b_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}\\ &= \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

★ immédiat

★ On a :

$$(AC)^{\mathrm{T}} = \left[\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}c_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}\right]^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{j,k}c_{k,i}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant n}} = \left(\sum_{k=1}^{p} c_{k,i}a_{j,k}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant n}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

par définition du produit matriciel et car $C^{\top} = (c_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $A^{\top} = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$. ■

Définition 6 (matrice symétrique, matrice antisymétrique) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (matrice carrée). On dit que :

★ A est symétrique si $A^{\mathrm{T}} = A$;

★ A est antisymétrique si $A^{\mathrm{T}} = -A$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

Remarques :

★ Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si et seulement si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad a_{i,j} = a_{j,i}$$

★ Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad a_{i,j} = -a_{j,i}$$

Ceci implique que les coefficients diagonaux de A sont nuls.

★ Toute combinaison linéaire de matrices symétriques (respectivement antisymétriques) est une matrice symétrique (respectivement antisymétrique).

Exemple 5 ★ Toute matrice diagonale (par exemple I_n) est symétrique.

★ La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

II – L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

La propriété structurelle suivante est une synthèse des propriétés démontrées précédemment.

Proposition 6 Le triplet $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, il est non commutatif si $n \geqslant 2$. Les éléments neutres sont :

★ 0_n pour l'addition ;

★ I_n pour la multiplication.

1) Pathologies de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

(a) Il est non intègre

On rappelle qu'un anneau $(A,+,\times)$ est *intègre* si :

$$\forall a,b \in A, \qquad a \times b = 0_A \implies a = 0_A \text{ ou } b = 0_A$$

Si $n \geqslant 2$, l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des *diviseurs de zéro.*

(b) Existence d'éléments nilpotents

Définition 7 (matrice nilpotente) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$A^k = 0_n$$

Dans un anneau intègre, il n'existe pas d'élément non nul qui soit nilpotent. Par contre, il en existe dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non nulle mais $A^2 = 0_2$. Donc A est nilpotente.

2) Identités remarquables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Les deux formules suivantes, bien connues dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, ont été vues dans un anneau quelconque.

Proposition 7 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent (*i.e.* telles que $AB = BA$).

- ⋆ **Formule du binôme de Newton :**

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

- ⋆ **Formule de factorisation :**

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$$

Démonstration Nous l'avons démontré dans le cas d'un anneau $(A,+,\times)$ quelconque. ■

Remarque : dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices scalaires (c'est-à-dire de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$) commutent avec tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

✎✎✎ **Exercice 2** Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$).

Une solution. On a $A = D + N$ où $D = 3I_3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices D et N commutent car D est une matrice scalaire. De plus, $N^2 = 0_3$ donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad N^k = N^2 N^{k-2} = 0_3 N^{k-2} = 0_3$$

On a $A^0 = I_3$, $A^1 = A$ et, si $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ (d'après la formule du binôme de Newton) :

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k D^{p-k} = D^p + pND^{p-1} = 3^p I_3 + p3^{p-1} N = \begin{pmatrix} 3^p & 0 & p3^{p-1} \\ 0 & 3^p & 0 \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix}$$

3) Parties stables par produit

On note $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement triangulaires inférieures, diagonales).

Proposition 8 ⋆ Les ensembles $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par produits.

⋆ De même, $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit et :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}, \qquad \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$$

Démonstration ⋆ Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i > j$. On veut montrer que $(AB)_{i,j} = 0$. On a :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{=0} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0} = 0$$

car les matrices A et B sont triangulaires supérieures. On procède de la même manière pour des matrices triangulaires inférieures.

⋆ Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$. On pose :

$$D_\lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k} \qquad \text{et} \qquad D_\mu = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell E_{\ell,\ell}$$

Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$D_\lambda D_\mu = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_k \mu_\ell \underbrace{E_{k,k} E_{\ell,\ell}}_{=\delta_{k,\ell} E_{k,\ell}}}_{=\lambda_k \mu_k E_{k,k}} = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

4) Groupe linéaire

Rappel : une matrice A de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible (pour la multiplication matricielle) s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$.

Définition 8 (groupe linéaire) Le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est appelé groupe linéaire et est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &= \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^\times \\ &= \left\{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,\middle|\, \exists\, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA = I_n \right\} \end{aligned}$$

Exemple 6 ⋆ $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;

⋆ si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est telle que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^*$, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (il suffit de prendre $B = \mathrm{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n})$) ;

⋆ $0_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(a) Propriétés

Proposition 9 (propriétés de l'inverse) Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :

⋆ A^{-1} est inversible d'inverse $(A^{-1})^{-1} = A$;

⋆ la matrice AB est inversible d'inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

⋆ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la matrice A^k est inversible d'inverse $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

⋆ la matrice A^{T} est inversible d'inverse $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Démonstration Les trois premières propriétés ont été démontrées dans le chapitre sur les groupe. Démontrons la dernière propriété. On a (en utilisant la formule donnant la transposée d'un produit) :

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = I_n^{\mathrm{T}} = I_n$$

car I_n est une matrice symétrique. De la même manière, on a $(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = I_n$. La matrice A^{T} est donc inversible d'inverse $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$. ■

(b) Le cas particulier $n = 2$

On décrit ici $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

Proposition/définition 1 ($\mathbf{GL_2}(\mathbb{K})$) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant* de A, noté $\det(A)$, le scalaire :

$$\det(A) = ad - bc \in \mathbb{K}$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et, dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration On vérifie facilement que :

$$A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} A = (ad - bc)I_2$$

⋆ Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (par définition de l'inversibilité et d'après le calcul précédent).

⋆ Supposons maintenant que A soit inversible. Par l'absurde, supposons que $ad - bc = 0$. Alors :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} \underbrace{(ad - bc)}_{=0} I_2 = 0_2,$$

c'est-à-dire $a = b = c = d = 0$. Alors $A = 0_2$ ce qui est absurde car la matrice nulle n'est pas inversible. ■

Exemple 7 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible car $\det(A) = -2$. De plus, $A^{-1} = -\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

III – Systèmes linéaires

1) Définitions

Définition 9 (systèmes linéaires) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues $x_1, \dots x_p$* tout système $(\mathscr{S})$ de la forme :

$$(\mathscr{S}) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

- Les nombres $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont appelés les coefficients du système ;
- les nombres $b_1, \dots, b_n$ constituent ce qu'on appelle le second membre du système ;
- si $p = n$, alors on dit que le système est carré ;
- la $i^{\text{ème}}$ équation du système ou $i^{\text{ème}}$ ligne du système (pour $i \in [\![1, n]\!]$), notée L_i, est l'équation

$$\mathrm{L}_i : a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_p$$

- le système $(\mathscr{S})$ est dit *homogène* si tous les nombres b_i sont nuls ($\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = 0$) ;
- le système est dit *compatible* s'il admet au moins une solution ;
- une *solution du système* est un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant chacune des n équations du système ;
- *résoudre le système $(\mathscr{S})$*, c'est trouver l'ensemble de toutes les solutions du système.

Exemple 8 $\star$ $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right.$ est un système linéaire de deux équations et deux inconnues, que l'on peut interpréter géométriquement comme le lieu des points d'intersection de deux droites dans le plan ;

$\star$ $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \end{array} \right.$ est un système linéaire de deux équations et trois inconnues, que l'on peut interpréter géométriquement comme le lieu des points d'intersection de deux plans dans l'espace

On résout un tel système en utilisant la *méthode du pivot de Gauss*. Pour cela, nous ferons des opérations élémentaires sur les lignes du système.

Définition 10 On appelle opération élémentaire :

- l'échange de deux lignes L_i et L_j du système, opération notée $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$;
- la multiplication d'une ligne L_i par un scalaire non nul $\alpha \in \mathbb{K}^*$, notée $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\,\mathrm{L}_i$;
- ajouter à la ligne L_i la ligne L_j, noté $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \mathrm{L}_j$.

Remarque : en effectuant des opérations opérations élémentaires sur les lignes du système, on conserve l'équivalence entre les systémes.

2) Pivot de Gauss

L'objectif est d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système pour obtenir un système, équivalent au système $(\mathscr{S})$ initial et qui est *échelonné*, c'est-à-dire de la forme :

$$(\mathscr{E})\left\{\begin{array}{cccccccccc}
\alpha_{1,j_1}\,x_{j_1} & + & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & + & \alpha_{1,p}\,x_p & = & \beta_1 \\
 & & \alpha_{2,j_2}\,x_{j_2} & + & \cdots\ \cdots & + & \alpha_{2,p}\,x_p & = & \beta_2 \\
 & & & \ddots & & & & & \vdots \\
 & & & \alpha_{r,j_r}\,x_{j_r} & + & \cdots & + \ \alpha_{r,p}\,x_p & = & \beta_r \\
 & & & & & & 0 & = & \beta_{r+1} \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & 0 & = & \beta_n
\end{array}\right.$$

où $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

- ⋆ Les dernières équations sont appelées des *équations de compatibilité* ; le système est compatible si et seulement si ces équations sont satisfaites.
- ⋆ On résout alors le système par la technique de la remontée : les inconnues, dites *principales* sont ici $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$.
- ⋆ On exprime celles-ci, en partant de la dernière équation, en fonction des autres inconnues s'il y en a (qui sont quant à elles qualifiées de *secondaires*).

Exemple 9 Résoudre le système échelonné :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & - & 2z & = & 3 \\
 & & y & + & z & = & 1
\end{array}\right.$$

Description de l'algorithme du privot de Gauss : (*repartons du système* $(\mathscr{S})$)

- ⋆ Supposons que $a_{1,1} \neq 0$. Sur chaque ligne $\mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{L}_n$, on effectue l'opération élémentaire $\mathrm{L}_k \leftarrow \mathrm{L}_k - \dfrac{a_{k,1}}{a_{k,k}}\,\mathrm{L}_k$ (où $k \in [\![2, n]\!]$). Ceci a pour effet d'éliminer l'inconnue x_1 sur les lignes $\mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{L}_n$.
- ⋆ On poursuit le procédé pour éliminer x_2 sur les lignes $\mathrm{L}_3, \ldots, \mathrm{L}_n$.

On obtient à la fin du processus un système échelonné équivalent au premier système.

Exemple 10 Résoudre les systèmes :

$$(\mathscr{S}_1)\left\{\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & z & = & 1 \\
x & - & y & + & 2z & = & 2 \\
2x & & & + & 3z & = & 3
\end{array}\right.
\qquad \text{et} \qquad
(\mathscr{S}_2)\left\{\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & z & = & 1 \\
x & - & y & + & 2z & = & 2 \\
2x & & & + & 3z & = & 2
\end{array}\right.$$

IV – Calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée

1) Interprétation matricielle d'un système linéaire

Le système $(\mathscr{S})$ de la première définition est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$ où :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

On dit que :

- ⋆ A est la *matrice du système* ;
- ⋆ B est le *second membre du système* ;
- ⋆ X est l'inconnue.

L'équation homogène associée au système est $AX = 0_{n,1}$ (notée $(\mathscr{H})$).

Exemple 11 Le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 42 \end{array}\right.$ se réécrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 42 \end{pmatrix}}_{=B}$$

Remarque : le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Proposition 10 (ensemble des solutions de $AX = B$) Si le système $AX = B$ est compatible, alors son ensemble de solutions est :

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{S}) = \left\{X_0 + X_H \,\middle|\, X_H \in \mathrm{Sol}(\mathscr{H})\right\},$$

où X_0 est une solution particulière du système $AX = B$ et où on a noté $\mathrm{Sol}(\mathscr{S})$ et $\mathrm{Sol}(\mathscr{H})$ les ensembles de solutions de $(\mathscr{S})$ et $(\mathscr{H})$ respectivement.

Démonstration On raisonne par double inclusion. On note E l'ensemble de droite de la proposition.

$\boxed{\subset}$ Soit $X \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$. En posant $X_H = X - X_0$, on a bien l'égalité $X = X_0 + X_H$ et on a $X_H \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$ car, par bilinéarité du produit matriciel,

$$AX_H = AX - AX_0 = B - B = 0_{n,1}$$

Ainsi, $X \in E$, d'où l'inclusion $\mathrm{Sol}(\mathscr{S}) \subset E$.

$\boxed{\supset}$ Soit $X \in E$. Il existe $X_H \in \mathrm{Sol}(\mathscr{H})$ tel que $X = X_0 + X_H$. Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$AX = AX_0 + AX_H = B + 0_{n,1} = B$$

donc $X \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$. D'où l'inclusion $E \subset \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$. ■

2) Interprétation matricielle des opérations élémentaires

On reprend les notations du paragraphe précédent. On souhaite ici comprendre ce qu'il se passe sur la matrice A lorsqu'on échelonne le système $(\mathscr{S})$ $AX = B$ à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.

Rappel : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, la matrice élémentaire $E_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{\ell,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Lemme 1 Pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$, la matrice $E_{i,j} \times A$ est la matrice de taille $n \times p$ dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui est constituée de la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.

Démonstration Soit $i,j \in [\![1,n]\!]$. On sait que $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell} \underbrace{E_{k,\ell}}_{n\times p}$ donc :

$$E_{i,j}A = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell} \underbrace{E_{i,j}}_{n\times n} \underbrace{E_{k,\ell}}_{n\times p} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell}\delta_{j,k} \underbrace{E_{i,\ell}}_{n\times p} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{j,\ell}E_{i,\ell},$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

On introduit les nouvelles matrices (carrées cette fois) suivantes (où $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$) qui sont inversibles :

- ⋆ **matrice de dilatation :**

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{pour } \lambda \in \mathbb{K}^*)$$

- ⋆ **matrice de transvection :** $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$
- ⋆ **matrice de permutation :** $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$

Proposition 11 Effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A (*i.e.* dans le système $(\mathscr{S})$) revient à multiplier A à gauche par l'une des matrices $D_i(\lambda)$, $T_{i,j}(\lambda)$ ou $P_{i,j}$. Plus précisément :

- ⋆ permuter L_i avec L_j dans A correspond au système $P_{i,j}AX = P_{i,j}B$;
- ⋆ multiplier L_i par $\lambda\,\mathrm{L}_i$ correspond à $D_i(\lambda)AX = D_i(\lambda)B$;
- ⋆ remplacer L_i par $L_i + \lambda L_j$ $(j \neq i)$ correspond au système $T_{i,j}(\lambda)AX = T_{i,j}(\lambda)B$.

Démonstration Pour l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ par exemple, on a :

$$T_{i,j}(\lambda)A = (I_n + \lambda E_{i,j})A = A + \lambda E_{i,j}A$$

On conclut avec le lemme. ■

3) Inversion d'une matrice carrée

Définition 11 (système de Cramer) Un système linéaire est dit *de Cramer* si :

- ⋆ il est carré (*i.e.* admet autant d'équations que d'inconnues) ;
- ⋆ sa matrice est inversible.

Exemple 12 Le système $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 3 \end{array} \right.$ est de Cramer.

Remarques :

- ⋆ Un tel système $AX = B$ (donc avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) admet une unique solution, à savoir $X = A^{-1}B$.
- ⋆ Pour étudier l'inversibilité d'une matrice et déterminer le cas échéant l'inverse d'une matrice carrée A, on peut lui appliquer l'algorithme du pivot de Gauss jusqu'à obtenir la matrice I_n : si on a réussit à écrire une égalité du type $P_1 \dots P_r A = I_n$, où les matrices P_i correspondent à des opérations élémentaires, alors (comme $P_1, \dots, P_r$ sont inversibles), on a $A = P_r^{-1} \dots P_1^{-1}$. Donc A est inversible et son inverse est $P_1 \dots P_r$.

Expliquons sur un exemple comment étudier l'inversibilité d'une matrice et déterminer l'inverse le cas échéant.

Exemple 13 Montrons que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculons A^{-1}.

Proposition 12 (cas particulier) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff (\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_{k,k} \neq 0)$$

En particulier, si A est diagonale et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors :

$$A^{-1} = \mathrm{diag}(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$$

Démonstration C'est une conséquence de l'algorithme du pivot de Gauss. Le cas des matrices diagonales a déjà été établi. ■