Dérivabilité

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

I – Généralités

1) Définition

Définition 1 (dérivabilité en un point) Soit $a \in I$. On dit que f est *dérivable en a* si la fonction (appelée fonction *taux d'accroissement en a*) :

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée *nombre dérivé de f en a* et il est noté $f'(a)$, *i.e.* :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarques :

- ⋆ La fonction f est dérivable en a si et seulement si le quotient $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Dans ce cas, on a l'égalité :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- ⋆ Géométriquement, les taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ correspondent aux pentes des cordes reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.

Exemple 1 Considérons la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x + a\right) \qquad \text{donc} \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} 2a \in \mathbb{R}$$

La fonction f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

2) Premières propriétés

Proposition 1 Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$$

Comme f est dérivable en a, on sait que la fonction $x \in I \setminus \{a\} \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a (égale à $f'(a)$). De plus $x - a \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ donc, d'après les propriétés sur les limites :

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a) \times 0 = 0$$

Par linéarité de la limite, la fonction f admet donc pour limite $f(a)$ en a. Autrement dit, f est continue en a. ■

Remarque : la réciproque est fausse. Considérons par exemple la fonction valeur absolue, dont la continuité en 0 est connue (cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$). Cette fonction n'est pas dérivable en 0 car :

$$\frac{|x|}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{tandis que} \qquad \frac{|x|}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1$$

Les limites à gauche et à droite de la fonction τ_0 sont différentes, donc τ_0 n'admet pas de limite en 0. Autrement dit, $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Proposition 2 (dérivabilité et $\mathbf{DL_1(0)}$) Soit $a \in I$. Alors f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie au voisinage de a telle que :

- ⋆ $f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ dans ce voisinage ;
- ⋆ $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

En cas de dérivabilité au point a, on a de plus $\lambda = f'(a)$.

Démonstration $\boxed{\Longrightarrow}$ Si f est dérivable en a, on peut écrire que :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

et on peut poser $\varepsilon(a) = 0$, ce qui démontre la première implication car $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ par hypothèse.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si V est un voisinage de a où est définie la fonction ε, alors :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda + \varepsilon(x),$$

quantité qui tend vers λ quand x tend vers a. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$. ■

Remarques :

- ⋆ Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative de f présente au point d'abscisse a une tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ (le coefficient directeur est $f'(a)$). Le résultat ci-dessus exprime le fait que, au voisinage de a, on peut approximer la courbe $\mathscr{C}_f$ par la tangente à la courbe au point d'abscisse a.
- ⋆ Le premier point de la propriété se réécrit, en posant $x = a + h$,

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h) \qquad \text{(dans un voisinage de 0)}$$

  où ε_1 est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\varepsilon_1(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.
- ⋆ **Interprétation physique :** si $f(t)$ désigne la position d'un mobile à l'instant t, alors :

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \underset{t \to a}{\longrightarrow} f'(a) : \text{vitesse instantanée du mobile au temps } a$$

  où $\dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ est la vitesse moyenne du mobile entre les instants t et a.

3) Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en un point

Définition 2 (dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite) Soit $a \in I$.

- ⋆ Si $a \neq \inf(I)$, on dit que f est dérivable à gauche en a si la fonction $f|_{I\cap]-\infty,a]}$ est dérivable en a, c'est-à-dire si la limite $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à gauche de f en a* et est noté $f'_g(a)$.
- ⋆ Si $a \neq \sup(I)$, on dit que f est dérivable à droite en a si la fonction $f|_{I\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a, c'est-à-dire si la limite $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à droite de f en a* et est noté $f'_d(a)$.

Exemple 2 On a vu que la fonction $f : x \longmapsto |x|$ n'était pas dérivable en 0. Par contre, elle est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

Le lien avec la dérivabilité au sens classique est le suivant.

Proposition 3 Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Démonstration C'est une conséquence immédiate de la proposition sur le lien entre la limite en un point et les limites à gauche et à droite en ce point. ■

✎✎✎ **Exercice 1** On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Montrer que f est dérivable en 0.

Une solution. On a $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

4) Fonction dérivable sur un intervalle

Définition 3 (fonction dérivable, fonction dérivée) Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout point de I. La fonction :

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

est appelée *fonction dérivée de f*.

Notation : l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles sera noté $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.

Remarque : en physique-chimie, la dérivée est aussi notée $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ou $\dot{f}$.

5) Dérivabilité et opérations

Proposition 4 (propriétés algébriques) Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables dérivables sur I.

- $\star$ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f + \lambda g$ est dérivable sur I et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$. *On parle de linéarité de la dérivation.*
- $\star$ La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\star$ Si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

  En particulier, $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{1}{g^2}$.

Démonstration $\star$ C'est une conséquence immédiate de la linéarité de la limite et de la définition de la dérivabilité (taux d'accroissements).

$\star$ Soient $a \in I$ et $x \in I \setminus \{a\}$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\end{aligned}$$

donc :

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

par continuité de f en a et dérivabilité de f et g en a. Ceci prouve que fg est dérivable en a, avec la formule du nombre dérivé associé.

$\star$ Soient $a \in I$ et $x \in I \setminus \{a\}$. Alors :

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \frac{1}{x - a} \times \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(a) - f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

donc :

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

en exploitant la continuité de g en a et la dérivabilité de f et g en a. ■

Proposition 5 (dérivabilité et dérivée d'une fonction composée) Soient I et J deux intervalles d'intérieurs non vides et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que :

- $\star$ $f(I) \subset J$;
- $\star$ f est dérivable sur I ;
- $\star$ g est dérivable sur J.

Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Démonstration Soit $a \in I$. Montrons que $g \circ f$ est dérivable en a. Posons $b = f(a) \in J$.

$\star$ On sait qu'il existe un voisinage W de b et une fonction $\varepsilon : W \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall y \in W \cap J, \qquad g(y) = g(b) + (y - b)g'(b) + (y - b)\varepsilon(y)$$

avec $\varepsilon(y) \xrightarrow[y \to b]{} 0$.

⋆ Comme f est continue (car dérivable) en a, il existe un voisinage V de a tel que $f(V \cap I) \subset W$. Pour tout $x \in V \cap I$, on a donc :

$$g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x) - f(a))g'(f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon(f(x))$$

et donc, si $x \in (V \cap I) \setminus \{a\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g'(f(a)) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \varepsilon(f(x)) \\ &\xrightarrow[x \to a]{} f'(a)g'(f(a)) \end{aligned}$$

par dérivabilité de f en a et en utilisant le théorème de composition des limites (qui s'applique car f admet pour limite b en a par continuité de f en a, et car la fonction ε tend vers 0 en b). On en déduit bien le résultat annoncé. ■

✎✎✎ **Exercice 2** Dérivabilité et dérivée de $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Proposition 6 (dérivabilité de f^{-1}) Soient I et J deux intervalles d'intérieurs non vides et $f : I \longrightarrow J$ une fonction continue et bijective. Soit $b \in J$. On pose $a = f^{-1}(b) \in I$. Alors :

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b \iff \left\{ \begin{array}{c} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{array} \right.$$

et, en cas de dérivabilité, on a l'égalité :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Démonstration $\boxed{\Longleftarrow}$ La fonction f^{-1} est continue en b (d'après le théorème de la bijection) donc :

$$\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) \tag{1}$$

Comme f est dérivable sur I, elle est en particulier dérivable en $f^{-1}(b) \in I$, *i.e.* :

$$\lim_{x \to f^{-1}(b)} \frac{f(x) - f(f^{-1}(b))}{x - f^{-1}(b)} = f'(f^{-1}(b))$$

donc (puisque $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$), on a par passage à l'inverse :

$$\lim_{x \to f^{-1}(b)} \frac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - f(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

soit encore, par composition des limites (on utilise ici (1)) :

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Réciproquement, si f^{-1} est dérivable en b, alors (par composition des limites et par définition de la dérivabilité), la limite $\displaystyle\lim_{x \to f^{-1}(b)} \frac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - f(f^{-1}(b))}$ existe et est finie, ce qui signifie que f est dérivable en $f^{-1}(b)$ et que $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$.
D'où le résultat. ■

Remarque : tangente au graphe d'une fonction réciproque.

6) Dérivabilité et dérivée des fonctions usuelles

On peut déterminer les domaines de dérivabilité, ainsi que les dérivées des fonctions usuelles en utilisant la définition. Les résultats à connaître sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

expression de f	**domaine de définition**	**domaine de dérivabilité**	**expression de f'**
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x^n\ (n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\vert\, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\vert\, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{ch}(x)/\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)/\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$1 - \mathrm{th}(x)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$

II – Accroissements finis

On rappelle que $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles.

1) Extrema locaux

Définition 4 Soit $a \in I$.

- ⋆ On dit que f admet un *maximum* (respectivement *minimum*) *local en* a si :

$$\exists V \in \mathscr{V}(a),\ \forall x \in V \cap I,\ f(x) \leqslant f(a) \qquad \text{(respectivement } f(x) \geqslant f(a)\text{)}$$

- ⋆ Si f est dérivable en a et si $f'(a) = 0$, on dit que a est un point critique de f.

Le lien avec la dérivation est le suivant.

Proposition 7 (extrema et point critique) Soient $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \mathring{I}$. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f admet un maximum local en a. Comme de plus a est intérieur à I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset I$ et :

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon], \qquad f(x) \leqslant f(a) \tag{2}$$

- ⋆ Pour tout $x \in [a-\varepsilon, a[$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ d'après (2). En faisant tendre x vers a^-, on obtient $f'_g(0) \geqslant 0$.
- ⋆ De même :

$$\forall x \in]a, a+\varepsilon], \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0,$$

puis, par passage à la limite, $f'_d(0) \leqslant 0$.

Or f est dérivable en a donc $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$, ce qui implique que $f'(a) = 0$. ■

Remarques :

- ⋆ Géométriquement, la courbe représentative de f présente au point d'abscisse a une tangente horizontale.
- ⋆ La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f'(0) = 0$; pourtant, f n'admet pas d'extremum local en 0.
- ⋆ Il est important que a soit un point intérieur à I (c'est-à-dire ne soit pas un bord de I). Considérons par exemple la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$. Elle admet clairement un maximum en 1 et pourtant $f'(1) = \mathrm{e} \neq 0$.

2) Théorème de Rolle

Théorème 1 (de Rolle) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- ⋆ f est continue sur $[a,b]$;
- ⋆ f est dérivable sur $]a,b[$;
- ⋆ $f(a) = f(b)$.

Il existe alors $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration On distingue deux cas.

- ⋆ **Premier cas :**
  Si f est constante sur $[a,b]$, alors pour tout $c \in]a,b[$, on a $f'(c) = 0$ (donc tout élément de $]a,b[$ convient).
- ⋆ **Deuxième cas :**
  Supposons que f ne soit pas constante. D'après le théorème de la borne atteinte (qui s'applique puisque f est continue sur le segment $[a,b]$), la fonction f présente un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$. Comme f est supposée non constante sur $[a,b]$, on a nécessairement $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$. Par exemple, si $m \neq f(a)$, alors f atteint ce minimum en un point $c \in]a,b[$ et, d'après la proposition précédente, on a $f'(c) = 0$. ■

Remarques :

- ⋆ Il n'y a pas unicité du point c.
- ⋆ La courbe représentative de f admet nécessairement une tangente horizontale *entre* a et b.

✎✎✎ **Exercice 3** Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme admettant n racines réelles. Montrer P' au moins $n-1$ racines réelles.

Une solution.

Notons $x_1 < \cdots < x_n$ les racines réelles de P. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. On a $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$ et P, en tant que fonction polynomiale, est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et continue sur $[x_i, x_{i+1}]$. D'après le théorème de Rolle, il existe $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(\xi_i) = 0$. Les nombres $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ sont donc des racines de P' qui sont clairement deux à deux distinctes. Ainsi, P' a au moins $n-1$ racines réelles.

Remarque : le théorème de Rolle est faux pour les fonctions à valeurs complexes. Considérons par exemple la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (voir plus loin) $f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto i\,\mathrm{e}^{ix}$. Donc f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (car $|f'| = 1$). Pourtant, $f(0) = f(2\pi) = 1$.

3) Théorème des accroissements finis

(a) Énoncé

Théorème 2 (des accroissements finis) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- ⋆ f est continue sur $[a, b]$;
- ⋆ f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors :

$$\exists\, c \in]a, b[, \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{array} \right.$$

On a bien $g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(]a, b[, \mathbb{R})$ et on vérifie facilement que $g(a) = g(b)$. ■

Remarques :

- ⋆ Géométriquement, cela signifie qu'il existe un point $c \in]a, b[$ en lequel la tangente à la courbe représentative de f est parallèle à la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
- ⋆ En physique, ce résultat implique qu'il existe un instant dans tout mouvement en lequel vitesse instantanée et vitesse moyenne entre a et b coïncident.

✎✎✎ **Exercice 4** En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{x}{1 + x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$$

Le théorème des accroissements finis nous permettra d'établir des inégalités. On utilisera en pratique le résultat suivant.

(b) Application 1 : fonctions lipschitziennes

Définition 5 (fonction lipschitzienne) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $M \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est *M-lipschitzienne* sur I si :

$$\forall x, y \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

Remarques :

- ⋆ Dire que f est lipschitzienne est I signifie que l'ensemble :

  $$\left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \;\middle|\; (x, y) \in I^2,\ x \neq y \right\}$$

  est borné (par la constante de Lipschitz de f).
- ⋆ La définition se réécrit, en fixant $y = a \in I$:

  $$\forall x \in I, \qquad f(a) - M|x - a| \leqslant f(x) \leqslant f(a) + M|x - a|$$

  Graphiquement, le graphe de f se situe, dans l'intervalle I, à l'extérieur du double cône délimité par les droites d'équation $y = f(a) \pm M|x - a|$.

Exemple 3 $\star$ La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est lipschitzienne sur $[0,1]$, elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.
En effet, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on a :

$$|x^2 - y^2| = (x+y)|x-y| \leqslant 2|x-y|$$

donc f est 2-lipschitzienne sur $[0,1]$. Par contre :

$$\frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = 3x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$\star$ La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$.
En effet :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

Proposition 8 (lipschitzienne implique continue) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Alors f est continue sur I.

Démonstration On sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

Soit $a \in I$. Alors :

$$\forall x \in I, \qquad |f(x) - f(a)| \leqslant M|x-a|$$

et donc $|f(x) - f(a)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$. La fonction f est donc continue en a. ■

Remarque : la réciproque est fausse. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$ et est continue sur cet intervalle.

Le lien avec les accroissements finis est le suivant.

Corollaire 1 (inégalité des accroissements finis) Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in]a,b[, \qquad |f'(x)| \leqslant K$$

Alors f est K-lipschitzienne sur I.

Démonstration Soient $x, y \in I$. Il n'y a rien à démontrer si $x = y$. Supposons que $x < y$. On applique le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$. On a $f \in \mathscr{C}([x,y], \mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(]x,y[, \mathbb{R})$ (car $f \in \mathscr{D}(I), \mathbb{R})$) donc il existe $c \in]x,y[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$. On obtient l'inégalité souhaitée en prenant les valeurs absolues et en utilisant la majoration sur la fonction $|f'|$. Donc f est K-lipschitzienne sur I. ■

Exemple 4 La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Application 2 : étude pratique de suites récurrentes

Considérons une fonction $f : I \longrightarrow I$ *contractante*, *i.e.* K-lipschitzienne avec $K \in]0,1[$. Fixons $u_0 \in \overset{\circ}{I}$ et considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence [1] :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

On émet l'hypothèse suivante :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un point fixe } c \in I \text{ (c'est-à-dire } f(c) = c)}$$

Alors :

$$|u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| \leqslant K|u_n - c| \leqslant \cdots \leqslant K^{n+1}|u_0 - c|,$$

ce que l'on confirme par récurrence. On obtient alors que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$.

✎✎✎ **Exercice 5** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \alpha$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Une solution.

- ⋆ Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$. Alors $f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- ⋆ Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \varphi \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \iff x = \varphi$$

  car $x \geqslant 0$. Donc φ est le point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$.
- ⋆ Montrons maintenant que f est contractante. On utilise l'inégalité des accroissements finis. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2}$$

  Comme f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $\dfrac{1}{2} \in]0,1[$, la fonction f est contractante d'après le corollaire précédent (inégalité des accroissements finis).
- ⋆ Par une récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha - \varphi|$$

  d'où le résultat en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$.

4) Dérivation et monotonie

Théorème 3 (monotonie et dérivée) Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. Alors :

- ⋆ f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I ;
- ⋆ f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur I ;
- ⋆ f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

Démonstration ⋆ On raisonne par double implication.

1. Remarquons que la suite est bien définie puisque l'intervalle I est stable par f.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f soit croissante sur I. Soit $a \in I$. Comme f est croissante sur I, on a :

$$\forall x \in I, \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$$

et donc, en passant à la limite (ce qui est licite car f est dérivable en a), on obtient $f'(a) \geqslant 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient $x, y \in I$ tel que $x < y$ (il n'y a rien à démontrer si $x = y$). Montrons que $f(x) \leqslant f(y)$. Alors f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Comme $f'(c) \geqslant 0$ par hypothèse, on a $f(y) - f(x) \geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer.

- ⋆ Il suffit d'appliquer f à la fonction $-f$.
- ⋆ C'est une conséquence immédiate des deux premiers points. ■

Remarque : il est important que I soit un intervalle dans cet énoncé. En effet, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée négative. Pourtant, f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

On dispose d'un résultat analogue pour la monotonie stricte.

Définition 6 (partie de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide) Soit $\mathscr{E} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que $\mathscr{E}$ est *d'intérieur non vide* s'il existe $a, b \in \mathscr{E}$ tels que $a < b$ et $[a, b] \subset \mathscr{E}$. On écrit alors $\mathring{\mathscr{E}} \neq \varnothing$.

Exemple 5 $[0, 1]$ est d'intérieur non vide, $\{0, 1, 2, 3\}$ est d'intérieur vide

Proposition 9 Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. On pose :

$$\mathscr{E} = \left\{ x \in I \,\middle|\, f'(x) = 0 \right\}$$

Alors f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I et $\mathring{\mathscr{E}} = \varnothing$.

Démonstration $\boxed{\Longrightarrow}$ Si f est strictement croissante sur I, alors f est croissante sur I donc $f' \geqslant 0$ sur I d'après le résultat précédent. Par l'absurde, si $\mathring{\mathscr{E}} \neq \varnothing$, alors il existe $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $[a, b] \subset \mathscr{E}$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a donc $f'(x) = 0$. On en déduit que f est constante sur $[a, b]$, ce qui est absurde. Ainsi, $\mathring{\mathscr{E}} = \varnothing$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, supposons que $f' \geqslant 0$ sur I et $\mathring{\mathscr{E}} = \varnothing$. D'après la proposition précédente, f est croissante sur I. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Par croissance de f, on a $f(x) \leqslant f(y)$. Si $f(x) = f(y)$, alors f est constante sur $[x, y]$ et donc f' est nulle sur $[x, y]$, d'où $\mathring{\mathscr{E}} \neq \varnothing$. ■

Remarques :

- ⋆ On dispose d'un résultat analogue pour la décroissance stricte.
- ⋆ **Cas particulier :** si f est dérivable sur I et si $f' > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

✎✎✎ **Exercice 6** Étudier les variations de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{x^7}{7} - \dfrac{2x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3}$.

5) Théorème de la limite de la dérivée

Le résultat suivant permet d'étudier simplement la dérivabilité d'une fonction en un point sans utiliser les taux d'accroissement.

Théorème 4 (de la limite de la dérivée) Soient $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(I \setminus \{a\},\mathbb{R})$.

- ⋆ Si $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
- ⋆ Si $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a et sa courbe représentative admet une tangente verticale en a.

Démonstration ⋆ Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Posons $\alpha = \min(a,x)$ et $\beta = \max(a,x)$. On a $\alpha < \beta$, la fonction f est continue sur $[\alpha,\beta]$, dérivable sur $]\alpha,\beta[$ (car f est dérivable sur I et $[\alpha,\beta] \subset I$) donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]\alpha,\beta[$ tel que :

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

On sait que f' admet pour limite ℓ en a et, par encadrement, on a $c_x \xrightarrow[x\to a]{} a$ donc, par composition des limites, $f'(c_x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. On en déduit donc que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell$.

⋆ On conclut de la même manière dans le deuxième cas à partir de (3). ■

Remarque : dans le premier cas, on peut de plus conclure que la fonction f' est continue en a.

✎✎✎ **Exercice 7** Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$. Montrer que f peut-être prolongée en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Une solution.
La fonction f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}^*$ comme composition de fonctions dérivables (la fonction $x \longmapsto x^{-2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$). Par ailleurs, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0, le prolongement continu étant la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\tilde{f} = f$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\tilde{f}(0) = 0$. On sait que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

par croissances comparées. Donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = 0$ (d'après le théorème de la limite de la dérivée).

III – Espaces de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 7 (dérivées successives) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit les dérivées successives de f de la manière suivante :

- ⋆ on pose $f^{(0)} = f$;
- ⋆ si f est dérivable sur I, on pose $f^{(1)} = f'$;
- ⋆ si $k \in \mathbb{N}^*$ et si on a $f^{(k)} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f) est dérivable sur I, alors on définit la dérivée $(k+1)^{\text{ème}}$ de f par :
$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$$

Remarque : en physique, la dérivée $k^{\text{ème}}$ se note $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}$ (plutôt que $f^{(k)}$).

Définition 8 (fonctions de classe $\mathscr{C}^k$) Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

- ⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I si elle est continue sur I.
- ⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et si f' est continue sur I.
- ⋆ Plus généralement, si $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.
- ⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout entier naturel k.

Remarques :

- ⋆ Si $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$, alors les fonctions $f, f', \dots, f^{(k)}$ sont continues sur I et f' est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I.
- ⋆ Les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de dérivabilité.
- ⋆ On a la chaîne d'inclusions suivante :

$$\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^3(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$$

et l'égalité :

$$\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Proposition 10 (opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$) Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classes $\mathscr{C}^k$ sur I.

- ⋆ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f + \lambda g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$(f+\lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}$$

- ⋆ La fonction $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \qquad \text{(formule de Leibniz)}$$

- ⋆ Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- ⋆ Si $k \in \mathbb{N}^*$ et si la fonction f' ne s'annule pas sur I, alors f est bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $f(I)$.
- ⋆ Si $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et si $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Démonstration

⋆ Il suffit de procéder par récurrence sur k.

⋆ On utilise un raisonnement par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons la proposition $\mathscr{P}_k$: « si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, alors fg est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et on a la formule de Leibniz ».

- **Initialisation :** il n'y a rien à démontrer car un produit de fonctions continues sur un intervalle est une fonction continue et car la formule est claire.
- **Hérédité :** soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie et soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I. Alors f et g sont en particulier de classe $\mathscr{C}^k$ sur I donc, d'après l'hypothèse de récurrence, la fonction fg est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, les fonctions $f^{(i)}g^{(k-i)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (car f et g sont de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ et car $i \leqslant k$ et $k-i \leqslant k$) donc, par combinaison linéaire, la fonction $(fg)^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Autrement dit, la fonction fg est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ et, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(k+1)} = \left((fg)^{(k)}\right)' &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i)} g^{(k-i)}\right)' \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[f^{(i+1)} g^{(k-i)} + f^{(i)} g^{(k-i+1)}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)} g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k}{\ell-1} f^{(\ell)} g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \left[\binom{k}{\ell-1} + \binom{k}{\ell}\right] f^{(\ell)} g^{(k+1-\ell)} + f^{(k+1)} + g^{(k+1)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k+1}{\ell} \Big] f^{(\ell)} g^{(k+1-\ell)} + f^{(k+1)} + g^{(k+1)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell}] f^{(\ell)} g^{(k+1-\ell)}
\end{aligned}$$

d'après la formule du triangle de Pascal. La proposition $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion :** pour tout $k \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}_k$ est vraie par principe de récurrence simple.

⋆ admis

⋆ admis

⋆ admis ■

✎✎✎ **Exercice 8** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un domaine à préciser et déterminer ses dérivées successives.

IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Pour une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, la définition de la dérivabilité de f en $a \in I$ est la même que pour une fonction à valeurs réelles.

Proposition 11 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in I$. Alors f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivable en a. Dans ce cas :

$$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{Im}(f)'(a)$$

Démonstration On utilise le résultat sur les limites pour les fonctions à valeurs complexes :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe } &\iff \lim_{x\to a} \mathrm{Re}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \text{ et } \lim_{x\to a} \mathrm{Im}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \text{ existent} \\
&\iff \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{Re}(f(x))-\mathrm{Re}(f(a))}{x-a} \text{ et } \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{Im}(f(x))-\mathrm{Im}(f(a))}{x-a} \text{ existent} \\
&\iff \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont dérivables en } a
\end{aligned}$$

■

Exemple 6 Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

Il n'est bien sûr pas question de parler de monotonie de fonction à valeurs complexes. On sait que le théorème de Rolle n'est pas valable dans $\mathbb{C}$. Il en est de même pour le théorème des accroissements finis. Considérons par exemple la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Il est clair que :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \qquad f(2\pi) - f(0) \neq f'(c)(2\pi - 0)$$

Par contre, l'inégalité des accroissements finis reste valable pour une fonction à valeurs complexes.

Proposition 12 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \left(\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \right) |b - a|$$

Démonstration La démonstration nécessite d'avoir construit l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, ce que nous supposerons acquis. Soit $(a, b) \in I^2$. On peut supposer que $a \leqslant b$. Alors :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc, en invoquant l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \right) (b - a),$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎