Limites et continuité

I – Préambule : notion de voisinage

Définition 1 (voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$) Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle *voisinage de a* tout ensemble de la forme :

- ⋆ $[a-\delta, a+\delta]$ où $\delta > 0$ si $a \in \mathbb{R}$;
- ⋆ $[M, +\infty[$ où $M \in \mathbb{R}$ si $a = +\infty$;
- ⋆ $[-\infty, M[$ où $M \in \mathbb{R}$ si $a = -\infty$.

On note $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Exemple 1 ⋆ $\mathbb{R}_+^* \in \mathscr{V}(+\infty)$

⋆ $\mathscr{V}(0) = \big\{[-\varepsilon, \varepsilon] \,\big|\, \varepsilon > 0\big\}$

Proposition 1 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- ⋆ l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a ;
- ⋆ $\displaystyle\bigcap_{V \in \mathscr{V}(a)} V = \begin{cases} \{a\} & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$.

Démonstration ⋆ Il suffit de faire une disjonction de cas suivant que $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$. Par exemple, si $a \in \mathbb{R}$ et si V_1 et V_2 sont deux voisinages de a, alors il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que :

$$V_1 = [a-\delta_1, a+\delta_1] \qquad \text{et} \qquad V_2 = [a-\delta_2, a+\delta_2]$$

En posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, on a $V_1 \cap V_2 = [a-\delta, a+\delta]$ qui est bien un voisinage de a.

⋆ On raisonne par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Supposons que $a \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{V \in \mathscr{V}(a)} V$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, ce qui implique que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |x-a| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, $|x-a|$ minore $\mathbb{R}_+^*$. Par définition de la borne inférieure d'un ensemble, on a alors $|x-a| \leqslant \inf(\mathbb{R}_+^*)$ et donc $|x-a| \leqslant 0$. Ainsi, $x = a$ par positivité de la valeur absolue.

Supposons maintenant que $a = +\infty$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\displaystyle\bigcap_{V \in \mathscr{V}(+\infty)} V \neq \varnothing$. Soit alors $x \in \displaystyle\bigcap_{V \in \mathscr{V}(+\infty)} V$. Posons $M = \lfloor x \rfloor + 1 > x$. Alors $x \notin [M, +\infty[$ alors que $[M, +\infty[\in \mathscr{V}(+\infty)$, ce qui est absurde. Le cas $a = -\infty$ se traite de la même manière.

$\boxed{\supset}$ Pour tout voisinage V de a, on a $a \in V$ par définition d'un voisinage de a. Donc on a bien l'inclusion $\{a\} \subset \displaystyle\bigcap_{V \in \mathscr{V}(a)} V$. ■

Proposition 2 (séparation de $\overline{\mathbb{R}}$) Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $a \neq b$. Alors il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ et $W \in \mathscr{V}(b)$ tels que $V \cap W = \varnothing$.

Remarque : étant donnés deux points distincts de la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$, on peut donc trouver deux voisinages de ces points qui ne se rencontrent pas. En topologie, on dit que $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace métrique *séparé*.

Démonstration On distingue plusieurs cas.

- ⋆ Si a et b sont des nombres réels, considérons $\delta := \dfrac{|b-a|}{2} > 0$. Il est alors clair que $V = [a-\delta, a+\delta]$ et $W = [b-\delta, b+\delta]$ sont des voisinages de a et b respectivement qui sont disjoints.
- ⋆ Si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$, alors $[a-1, a+1]$ et $[a+2, +\infty[$ sont des voisinages de a et b respectivement qui sont disjoints.
- ⋆ Les autres cas se traitent de manière analogue. ■

Définition 2 (propriété vraie au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$) Soit $\mathscr{P}(x)$ une propriété dépendant d'une variable réelle x et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que *$\mathscr{P}$ est vraie au voisinage de a* si :

$$\exists\, V \in \mathscr{V}(a),\ \forall x \in V, \mathscr{P}(x)$$

Exemple 2 ⋆ L'inégalité $x^2 \leqslant 1$ est vraie au voisinage de 0 (dans le voisinage $[-1, 1] \in \mathscr{V}$ par exemple).

⋆ La fonction $x \longmapsto x^3$ est décroissante au voisinage de $-\infty$ (elle l'est par exemple sur $]-\infty, 0]$).

II – Limite d'une fonction en un point

1) Définitions

Définition 3 (intérieur, adhérence) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$. On appelle :

- ⋆ *intérieur de I* l'ensemble $\overset{\circ}{I} = I \setminus \{a, b\} \subset \mathbb{R}$;
- ⋆ *adhérence de I* l'ensemble $\overline{I} = I \cup \{a, b\} \subset \overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 3 ⋆ $\overline{[0, 2[} = [0, 2]$, $\overset{\circ}{\overbrace{[0, 2[}} =]0, 2[$

⋆ $\overline{[0, +\infty[} = [0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}_+}$, $\overset{\circ}{\overbrace{[0, +\infty[}} =]0, +\infty[$

Dans toute la suite du paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide (autrement dit, $I = [a, b]$ ou $I =]a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou $I = [a, b[$, avec a et b deux nombres réels tels que $a < b$) et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

Définition 4 (les neuf cas possibles) Soient $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

⋆ Si $a, \ell \in \mathbb{R}$, on dit que f *tend vers ℓ quand x tend vers a*, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On peut aussi avoir les cas $a = \pm\infty$ ou $\ell = \pm\infty$.

- $\star$ $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$:
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$
- $\star$ $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$:
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \leqslant M$$
- $\star$ $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant M \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$
- $\star$ $a = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant M \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$
- $\star$ $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$:
$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant M \Longrightarrow f(x) \leqslant m$$
- $\star$ $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$:
$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant M \Longrightarrow f(x) \geqslant m$$
- $\star$ $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$:
$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant M \Longrightarrow f(x) \geqslant m$$
- $\star$ $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$:
$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant M \Longrightarrow f(x) \leqslant m$$

Exemple 4 On a $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. En effet :
$$\forall M > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant \ln(M) \Longrightarrow e^x \geqslant M$$
par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

On peut unifier les définitions précédentes à l'aide de la notion abstraite de voisinage.

Définition 5 (avec les voisinages) Soient $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *tend vers ℓ en a* lorsque :
$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists W \in \mathscr{V}(a),\ f(W \cap I) \subset V$$
On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Remarques :

- $\star$ L'assertion $f(W \cap I) \subset V$ signifie :
$$\forall x \in W \cap I, \qquad f(x) \in V$$
- $\star$ Pour tout $W \in \mathscr{V}(a)$, on a $W \cap I \neq \varnothing$.
- $\star$ En français : « pour tout voisinage V de ℓ, si x est *suffisamment* proche de a, alors $f(x)$ appartiendra à V ».

2) Premières propriétés

Proposition 3 (unicité de la limite) Lorsqu'elle existe, la limite d'une fonction en un point (de $\overline{I}$) est unique.

Démonstration Soit $a \in \overline{I}$. On suppose que f admet deux limites différentes ℓ et ℓ' en a, avec $(\ell, \ell') \in (\overline{\mathbb{R}})^2$. Soient $V \in \mathscr{V}(\ell)$ et $V' \in \mathscr{V}(\ell')$ tels que $V \cap V' = \varnothing$ (ce qui est possible car $\ell \neq \ell'$). Par définition de la limite, il existe deux voisinages W et W' de a tels que :

$$f(W \cap I) \subset V \qquad \text{et} \qquad f(W' \cap I) \subset V'$$

On a $W \cap W' \cap I \subset W \cap I$ donc :

$$f(W \cap W' \cap I) \subset f(W \cap I) \subset V \qquad \text{et, de même,} \qquad f(W \cap W' \cap I) \subset V'$$

Comme $W \cap W'$ est un voisinage de a, on a $W \cap W' \cap I \neq \varnothing$. Pour tout $x \in W \cap W' \cap I$, on a donc $f(x) \in V \cap V'$. On en déduit que $V \cap V' \neq \varnothing$, ce qui est absurde. ■

Proposition 4 (limite finie et bornitude) Soit $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de f en a. Considérons le voisinage $V = [\ell - 1, \ell + 1]$ de ℓ. Alors il existe un voisinage W de a tel que $f(W \cap I) \subset V$. Donc :

$$\forall x \in W \cap I, \qquad \ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1,$$

ce qui prouve que f est bornée sur $W \cap I$. ■

Proposition 5 (valeur de la limite en un point de I) Soit $a \in I$ (donc $a \in \mathbb{R}$). Si f possède une limite en a, alors cette limite est finie et égale à $f(a)$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Démonstration On suppose qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Alors :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists W \in \mathscr{V}(a),\ f(W \cap I) \subset V$$

Pour tout voisinage W de a, on a $a \in W$ et $a \in I$ donc $a \in W \cap I$, ce qui implique que $f(a) \in V$. Ainsi, $f(a) \in \bigcap\limits_{V \in \mathscr{V}(\ell)} V$. Si $\ell = \pm\infty$, alors cette intersection est vide, ce qui n'est pas possible. Ainsi $\ell \in \mathbb{R}$ et :

$$f(a) \in \bigcap_{V \in \mathscr{V}(\ell)} = \{\ell\},$$

c'est-à-dire $f(a) = \ell$. ■

Proposition 6 (limite nulle) Soit $a \in \overline{I}$. Alors :

- ⋆ $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$;
- ⋆ si g est une fonction bornée au voisinage de a et si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Démonstration ⋆ Il suffit d'écrire la définition.
⋆ démonstration analogue à celle sur les suites ■

Exemple 5 On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$ car la fonction sinus est bornée sur $\mathbb{R}$ et car $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3) Limite à gauche, limite à droite

La fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

n'admet pas de limite en 0. En effet, si tel était le cas, et en notant $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de f en 0, alors :

$$\exists\, \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - 0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$$

On a alors :

$$2 = |f(-\delta) - f(\delta)| \leqslant 2 \times \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde.
Pour cette fonction, on peut étudier la limite *à gauche en* 0 (ou la limite à droite en 0).

Définition 6 (limite à gauche, limite à droite) Soit $a \in \overline{I}$.

- ⋆ Si $a \neq \inf(I)$, on appelle *limite à gauche de f en a*, si elle existe, la quantité notée $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, définie par :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f|_{I \cap]-\infty, a]}(x)$$

- ⋆ Si $a \neq \sup(I)$, on appelle *limite à droite de f en a*, si elle existe, la quantité notée $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, définie par :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f|_{I \cap [a, +\infty[}(x)$$

Exemple 6 ⋆ La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet une limite à droite en 0 égale à $+\infty$.

- ⋆ La fonction f de l'exemple précédent admet une limite à gauche en 0 (qui vaut -1) et une limite à droite en 0 (qui vaut 1).

Proposition 7 Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ⋆ f admet une limite en a ;
- ⋆ f admet une limite à gauche et à droite en a qui sont égales à $f(a)$.

Démonstration $\boxed{\Longrightarrow}$ On sait que si f admet une limite ℓ en a, avec $a \in \overset{\circ}{I}$, alors nécessairement $\ell = f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

En particulier :

$$\forall x \in I \cap]-\infty, a[,\ |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

donc f admet une limite à gauche en a qui vaut $f(a)$. De même, f admet une limite à droite en a qui vaut $f(a)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f admette une limite à gauche et à droite en a toutes les deux égales à $f(a)$. Fixons $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap]-\infty, a[,\ |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

et :

$$\forall x \in I \cap]a, +\infty[,\ |x - a| \leqslant \delta' \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

En posant $\alpha = \min(\delta, \delta') > 0$, on a :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ |x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

et on peut remplacer $I \setminus \{a\}$ par I dans cette proposition (puisque $f(a) - f(a) = 0$). Donc f admet une limite en a (égale à $f(a)$). ■

Remarque : il est important que les limites à gauche et à droite en a soient égales à $f(a)$ pour assurer l'existence de la limite de f en a (*cf.* l'exemple précédent).

Proposition 8 (Théorème de la limite monotone) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors :

- ⋆ en tout point de $\overset{\circ}{I}$, f admet une limite à gauche et à droite ;
- ⋆ f admet une limite à gauche au point $\sup(I)$;
- ⋆ f admet une limite à droite au point $\inf(I)$.

Démonstration Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que la fonction f est croissante. Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ et considérons l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \{f(x) \,|\, x \leqslant a\}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide (elle contient a) et majorée par $f(a)$ (par croissance de f sur I) ; elle admet donc une borne supérieure que l'on note M. Comme $f(a)$ majore l'ensemble $\mathscr{E}$, on a nécessairement $M \leqslant f(a)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ ne majore pas $\mathscr{E}$ donc il existe $x_0 \in I$ tel que $x_0 < a$ et $f(x_0) > M - \varepsilon$. On a alors $|M - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
Soit $x \in]x_0, a[$. Alors (par croissance de f sur I) :

$$M \geqslant f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant M - \varepsilon$$

c'est-à-dire $|f(x) - M| \leqslant \varepsilon$. On en déduit que f admet une limite à gauche en a égale à M. On procède de manière analogue pour la limite à droite et pour les cas $a = \sup(I)$ et $a = \inf(I)$. ■

4) Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 1 (caractérisation séquentielle de la limite) Soient $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ⋆ $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$;
- ⋆ pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, on a $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Démonstration On effectue la démonstration dans le cas $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ (les démonstrations dans les autres cas sont analogues).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet une limite en $a \in \mathbb{R}$ égale à $\ell \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

De plus, par définition de la convergence d'une suite,

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |x_n - a| \leqslant \delta$$

Pour tout entier $n \geqslant N$, on a donc $|f(x_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On raisonne par contraposition. Supposons que f ne tende pas vers ℓ en a. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \delta > 0,\ \exists\, x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

En choisissant $\delta = \dfrac{1}{n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$), on trouve donc une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de points de I telle que $|x_n - a| \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers a et $(f(x_n))_{n \geqslant 1}$ ne converge pas vers ℓ, d'où le résultat. ■

Exemple 7 Ce résultat peut permettre de montrer qu'une fonction donnée n'admet pas de limite en un point. Considérons par exemple la fonction sin sur $\mathbb{R}$. Si cette fonction admettait une limite (notée ℓ) en $+\infty$, alors pour toute suite $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, on aurait $\sin(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Les choix $x_n = 2n\pi$ et $y_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ fournissent deux suites qui admettent deux limites différentes (à savoir 0 et 1), ce qui est absurde.

5) Opérations sur les limites

Les propriétés suivantes sont analogues à celles vues sur les suites numériques.

Proposition 9 Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$, $a \in \overline{I}$ et $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$. Alors on a les propriétés suivantes (à moins d'être dans un cas de forme indéterminée) :

- ⋆ $f(x) + \lambda g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell + \lambda \ell'$;
- ⋆ $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell\ell'$;
- ⋆ si $\ell \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration Il suffit d'adapter la démonstration de la propriété analogue vue pour les suites. ■

Proposition 10 (composition des limites) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ (non vides et non réduit à un point), $f \in \mathbb{R}^I$, $g \in \mathbb{R}^J$, $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

- ⋆ $f(I) \subset J$;
- ⋆ $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$;
- ⋆ $g(x) \xrightarrow[x \to b]{} \ell$;

Alors $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Démonstration Soit $V \in \mathscr{V}(\ell)$.

- ⋆ Comme g admet pour limite ℓ en b, il existe un voisinage W de b tel que $g(W \cap J) \subset V$.
- ⋆ Ensuite, f admet pour limite b en a donc il existe un voisinage W' de a tel que $f(W' \cap I) \subset W$. On a aussi $f(W' \cap I) \subset J$ (car f est à valeurs dans J par hypothèse) donc $f(W' \cap I) \subset W \cap J$.

Par conséquent :

$$(g \circ f)(W' \cap I) = g(f(W' \cap I)) \subset g(W \cap J) \subset V$$

Par définition de la limite, on a bien $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. ■

Exemple 8 On a $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

6) Limites et inégalités

Proposition 11 (passage à la limite dans des inégalités larges) Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f \leqslant g$ au voisinage de a (*i.e.* : $\exists W \in \mathscr{V}(a),\ \forall x \in W,\ f(x) \leqslant g(x)$). Alors :

- ⋆ $\ell \leqslant \ell'$;
- ⋆ en particulier, si $\ell = +\infty$ alors $\ell' = +\infty$, et si $\ell' = -\infty$ alors $\ell = -\infty$ (*théorème de comparaison*).

Démonstration On utilise la caractérisation séquentielle de la limite ainsi que le résultat sur le passage à la limite dans des inégalités pour les suites. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ une suite de points qui converge vers a. Par hypothèse, il existe un voisinage W de a tel que :

$$\forall x \in W, \qquad f(x) \leqslant g(x)$$

Comme x admet pour limite a et puisque W est un voisinage de a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad x_n \in W$$

Ainsi :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad f(x_n) \leqslant g(x_n)$$

Par ailleurs, les suites $(f(x_n))_{n\geqslant n_0}$ et $(g(x_n))_{n\geqslant n_0}$ convergent vers ℓ et ℓ' respectivement d'après la caractérisation séquentielle de la limite. En appliquant le résultat sur le passage à la limite pour les suites, on obtient l'inégalité $\ell \leqslant \ell'$. ■

Exemple 9 On a $x^2 - x\cos(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 12 (théorème d'encadrement ou des gendarmes) Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

- ⋆ $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a ;
- ⋆ $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$;
- ⋆ $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Démonstration On peut procéder de la même manière : on utilise la caractérisation séquentielle de la limite ainsi que le théorème des gendarmes pour les suites. ■

✎✎✎ **Exercice 1** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

III – Continuité en un point

On désigne toujours par I un intervalle non vide et non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

1) Continuité en un point

Définition 7 (continuité en un point) Soit $a \in I$. On dit que f est continue au point a si :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

Exemple 10 La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue en 1. Montrons en effet que :

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 1]{} \sqrt{1} = 1$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - 1| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant \sqrt{x} - 1 \leqslant \varepsilon &\iff 1 - \varepsilon \leqslant \sqrt{x} \leqslant \varepsilon + 1 \\ &\iff (1-\varepsilon)^2 - 1 \leqslant x - 1 \leqslant (\varepsilon+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

En choisissant $\delta = \min(1 - (1-\varepsilon)^2, (1+\varepsilon)^2 - 1)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |x - 1| \leqslant 1 \implies |\sqrt{x} - 1| \leqslant \varepsilon$$

2) Prolongement par continuité en un point

Le problème est le suivant : on considère une fonction $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $a \in I$. La fonction f n'est ici pas définie au point a de I et on se demande si on peut prolonger f en une fonction définie sur I et continue au point a.

Définition 8 (prolongement par continuité) On dit que f est *prolongeable par continuité en a* s'il existe une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur I telle que :

- ⋆ g soit continue au point a ;
- ⋆ $g|_{I\setminus\{a\}} = f$.

Le résultat suivant va nous permettre d'étudier ce problème.

Proposition 13 La fonction f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a.

Démonstration $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons qu'il existe une fonction g continue en a telle que $g|_{I\setminus\{a\}} = f$. Alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} g(a)$ et, comme $g|_{I\setminus\{a\}} = f$, on a $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} g(a)$. La fonction f admet donc une limite finie en a.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Posons $\ell = \lim\limits_{t\to a} f(t)$ et considérons la fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I, \qquad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

Comme f admet pour limite ℓ en a par hypothèse, la fonction g est continue en a. De plus, elle prolonge clairement la fonction f sur I. ■

Exemple 11 ⋆ Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^3+1}{x+1}$ qui est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad f(x) = x^2 - x + 1,$$

qui admet pour limite 3 quand x tend vers -1. On en déduit qu'on peut prolonger f par continuité en -1.

⋆ Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. On peut prolonger f par continuité en 0 car $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par composition des limites.

3) Continuité à droite, continuité à gauche

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$. Cette fonction n'est pas continue en 0 car $f(0) = 0$ mais $f(x) = -1$ pour tout $x \in [-1, 0[$. On peut introduire les notions de continuité à droite ou à gauche en un point.

Définition 9 (continuité à droite, continuité à gauche) Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$.

- ⋆ Si $a \neq \inf(I)$, on dit que f est *continue à gauche en a* si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
- ⋆ Si $a \neq \sup(I)$, on dit que f est *continue à droite en a* si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Exemple 12 Soit $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ (définie sur $\mathbb{R}$). Alors $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Donc f est continue à droite en 0, et elle n'est pas continue à gauche en 0.

Proposition 14 (lien avec la continuité) Soit $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

Démonstration C'est une conséquence immédiate du résultat sur le lien entre l'existence de limite et les limites à gauche et à droite. ■

✎✎✎ **Exercice 2** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x}\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

D'après la proposition précédente, la fonction f est continue en 0.

4) Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 (caractérisation séquentielle de la continuité) Soit $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ⋆ f est continue en a ;
- ⋆ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Démonstration C'est une conséquence immédiate de proposition sur la caractérisation séquentielle de la limite. ■

✎✎✎ **Exercice 3** On considère la fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$. En considérant la suite $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction f n'est pas continue en 0.

Une solution. La suite x converge vers 0. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc $f(x_n) = 0$. Ainsi, la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite $0 \neq f(0)$ (car $f(0) = 1$). D'après le critère séquentiel de continuité, la fonction f n'est pas continue en 0.

5) Continuité et opérations

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des opérations sur les limites.

Proposition 15 (propriétés algébriques) Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$. Alors :

- ⋆ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f + \lambda g$ est continue en a ;
- ⋆ la fonction $f \times g$ est continue en a ;
- ⋆ si $f(a) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie dans un voisinage de a et est continue en a.

Démonstration Il suffit d'appliquer la proposition relative aux opérations sur les limites. ■

Proposition 16 (composition de fonctions continues) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ (non vides et non réduit à un point), $a \in I$, $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$. On suppose que :

- ⋆ $f(I) \subset J$;
- ⋆ la fonction f est continue en a ;
- ⋆ la fonction g est continue en $f(a)$.

Alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème de composition des limites. ■

6) Continuité sur un intervalle

Définition 10 (continuité sur un intervalle) On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Notation : on notera $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues sur I.

On déduit de la proposition précédente les structures suivantes de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.

Corollaire 1

- ⋆ L'ensemble $\mathscr{C}^I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de vecteur nul la fonction nulle $\tilde{0}$: $x \in I \longmapsto 0$.
- ⋆ Le triplet $(\mathscr{C}(I,\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau commutatif dont les éléments neutres sont $\tilde{0}$ (pour l'addition) et $\mathbf{1} : x \in I \longmapsto 1$ (pour la multiplication).

Plus généralement, si on note $\mathscr{C}(I,I')$ l'ensemble des fonctions continues d'un intervalle I à valeurs dans un intervalle I', alors le théorème de composition précédent entraîne que, si I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall (f,g) \in \mathscr{C}(I,J) \times \mathscr{C}(J,\mathbb{R}), \qquad g \circ f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$$

IV – Théorèmes autour de la continuité

Les théorèmes suivants sont centraux en Analyse et seront fréquemment utilisés.

1) Théorème des valeurs intermédiaires

La question sous-jacente du théorème qui suit est la suivante : que dire de l'image d'un intervalle par une fonction continue ?

Théorème 3 (des valeurs intermédiaires) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

- ⋆ Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.
- ⋆ Tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent par f dans $[a,b]$.

Démonstration (du premier point en utilisant la propriété de la borne supérieure) Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) < 0$ (et alors $f(b) > 0$). Considérons l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \leqslant 0\}$$

Cet ensemble est une partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide (elle contient a) et qui est majorée (par b par définition de l'ensemble) ; elle admet donc une borne supérieure que l'on note c. Montrons maintenant que $c \notin \{a,b\}$ et $f(c) = 0$. On montre que $f(c) = 0$ en montrant les deux inégalités $f(c) \leqslant 0$ et $f(c) \geqslant 0$.

- ⋆ Comme $c = \sup(\mathscr{E})$, il existe $x \in \mathscr{E}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers c. Par définition de $\mathscr{E}$, on a :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x_n) \leqslant 0,$$

  puis, en utilisant le critère séquentiel de continuité au point c et le passage à la limite dans les inégalités, on obtient $f(c) \leqslant 0$.
- ⋆ L'inégalité précédente entraîne que $c < b$ (puisque $f(c) \leqslant 0$ tandis que $f(b) > 0$). On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

  $$\forall n \geqslant N, \qquad c + \frac{1}{n} \in [a,b]$$

  Par ailleurs, on sait aussi que pour tout $n \geqslant N$, on a $c + \frac{1}{n} \notin \mathscr{E}$ (par définition de la borne supérieure d'un ensemble) donc :

  $$\forall n \geqslant N, \qquad f\left(c + \frac{1}{n}\right) > 0$$

  Le critère séquentiel de continuité nous donne alors, en passant à la limite : $f(c) \geqslant 0$.

Finalement, on a bien l'égalité $f(c) = 0$ et $c \notin \{a,b\}$. ■

Démonstration (du premier point en utilisant le principe de dichotomie) Sans perte de généralité, on peut encore supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir construit des nombres réels $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ tels que :

(*i*) $a = a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_0 = b$;

(*ii*) pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$;

(*iii*) pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f(a_k) \leqslant 0 \leqslant f(b_k)$.

On construit alors les nombres réels a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante. On commence par poser $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Ensuite :

- — si $f(c_n) \geqslant 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
- — sinon, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Dans chacun des deux cas, il est claire que $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$. Par ailleurs :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Par ailleurs, $f(a_{n+1}) \leqslant 0 \leqslant f(b_{n+1})$ par construction.
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont clairement adjacentes donc elles convergent de limite commune notée $c \in [a,b]$. Par ailleurs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$$

La critère séquentiel de continuité de la fonction f au point c entraîne que les suites $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent de limite $f(c)$. En passant à la limite dans les inégalités précédentes, on obtient donc que $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$ et donc $f(c) = 0$. En particulier, on a $c \notin \{a,b\}$. ■

Démonstration (du deuxième point) Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(a) \leqslant f(b)$. Soit $y \in [f(a), f(b)]$. Si $y = f(a)$ (respectivement $y = f(b)$), alors a (respectivement b) est un antécédent de y par f dans $[a,b]$). Supposons maintenant que $y \in]f(a), f(b)[$ et considérons la fonction $g : x \in [a,b] \longmapsto f(x) - y$. Alors $g(a)g(b) < 0$ et g est continue sur $[a,b]$ donc il existe $c \in]a,b[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = y$. ■

Remarques :

- ⋆ La condition $f(a)f(b) < 0$ exprime simplement le fait que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
- ⋆ Il n'y a pas nécessairement unicité du point c dans cet énoncé.
- ⋆ Le principe de dichotomie sera exploité en informatique pour approcher numériquement les points d'annulation d'une fonction.

✎✎✎ **Exercice 4** Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Une solution.
Il n'y a rien à faire si $f(0) = 0$ ou si $f(1) = 1$. Supposons maintenant que $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$ et considérons la fonction $g : x \in [0,1] \longrightarrow x - f(x)$. Alors $g(0) = -f(0) < 0$ et $g(1) = 1 - f(1) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (la fonction g est continue sur $[0,1]$ comme différence de fonctions qui le sont), il existe $x \in]0,1[$ tel que $g(x) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 2 (image d'un intervalle par une fonction continue) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. On veut montrer que $f(I)$ est un intervalle. Soient $u, v \in f(I)$ tels que $u \leqslant v$. Il s'agit de montrer que $[u,v] \subset f(I)$. Soit $y \in [u,v]$. Par hypothèse sur u et v, il existe $a, b \in I$ tels que $u = f(a)$ et $v = f(b)$. Comme y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires entraîne qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$. Comme I est un intervalle, on a $x \in I$ (puisque $x \in [a,b]$ et $a, b \in I$) donc $y \in f(I)$. Finalement, on a bien montré que $[u,v] \subset f(I)$ et donc $f(I)$ est un intervalle. ■

Remarque : les intervalles I et $f(I)$ peuvent être de natures différentes. Par exemple, on a $\sin(]-\infty,+\infty[) = [-1,1]$.

2) Théorème des bornes atteintes

Rappel : on appelle *segment* de $\mathbb{R}$ tout intervalle de la forme $[a,b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a \leqslant b$.

Théorème 4 (des bornes atteintes)
- ⋆ Toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.
- ⋆ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration
- ⋆ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. D'après le (corollaire du) théorème des valeurs intermédiaires, $f([a,b])$ est un intervalle. Montrons que f possède un maximum (pour montrer que f possède un minimum, il suffit de montrer que $-f$ possède un maximum et on est ramené au cas précédent). Posons :

$$s = \sup(f([a,b])) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Cette borne supérieure existe d'après la propriété de la borne supérieure :
— ou bien cet ensemble n'est pas majoré et alors la borne supérieure vaut $+\infty$;
— ou bien $f([a,b])$ est majorée, auquel cas la borne supérieure existe dans $\mathbb{R}$.
Dans les deux cas, on sait d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure que s est la limite d'une suite d'éléments de $f([a,b])$; il existe donc $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$.
La suite numérique x est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, de limite notée $c \in [a,b]$. D'après le critère séquentiel de continuité, on a :

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = s$$

Par conséquent, $s \in \mathbb{R}$ (ce qui montre que f est majorée) et comme s est une valeur atteinte par la fonction f, il s'agit du maximum de f sur $[a,b]$ (atteint en c).
- ⋆ Posons $S = f([a,b])$, $s = \sup(S)$ et $i = \inf(I)$. On sait que $s, i \in \mathbb{R}$ d'après le point précédent. Montrons que $S = [i,s]$.
  — Par définition des bornes supérieure et inférieure (qui sont des majorant et minorant de S respectivement), on a l'inclusion $S \subset [i,s]$.
  — Les bornes i et s étant atteintes, on a $i, s \in S$. Or S est un intervalle (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) et $i \leqslant s$ donc $[i,s] \subset S$.

  On a l'égalité $S = [i,s]$ par double inclusion. ■

3) Continuité et monotonie stricte

Les résultats de ce paragraphe sont admis. Il est clair que toute fonction strictement monotone sur un intervalle est injective. La réciproque est fausse en général.

Proposition 17 (admis) Toute fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

Le résultat suivant renforce le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 5 (de la bijection, admis) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors :

- ⋆ f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$;
- ⋆ la fonction $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J (de même monotonie que f).

Remarque : dans un repère orthonormé, les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

V – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Tous les résultats de ce chapitre qui ne font pas intervenir d'inégalités restent vrais pour les fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. En particulier, le théorème des valeurs intermédiaires ne se généralise pas. Remarquons que :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \mathrm{Re}(f(x)) + i\,\mathrm{Im}(f(x))$$

et que les fonctions $\mathrm{Re}(f) : x \in I \longmapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f) : x \in I \longmapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont à valeurs réelles.

1) Limite

On peut définir la notion de limite pour une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ en un point a de $\overline{I}$. La limite est nécessairement un élément de $\mathbb{C}$.

Définition 11 Soient $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f admet pour limite ℓ en a si :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists W \in \mathscr{V}(a),\ f(W \cap I) \subset V$$

Ici, un voisinage de $\ell \in \mathbb{C}$ est un disque fermé $\overline{D}(\ell, r)$ de centre ℓ et de rayon $r > 0$.

Proposition 18 Soient $a \in \overline{I}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\ell = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Alors :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha \\ \mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \beta \\ \ell = \alpha + i\beta \end{array} \right.$$

Démonstration $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Soit $r > 0$. Il existe un voisinage W de a tel que :

$$\forall x \in I,\ x \in W \implies |f(x) - \ell| \leqslant r$$

Si $x \in W \cap I$, alors on a :

$$|\mathrm{Re}(f(x)) - \alpha| \leqslant |f(x) - \ell| \leqslant r$$

Donc $\mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On utilise l'inégalité $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$. ■

Exemple 13 $\mathrm{e}^{i\theta} \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$

2) Continuité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- ⋆ Soit $a \in I$. La fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- ⋆ La fonction f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Proposition 19 La fonction f est continue en $a \in I$ si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.

Démonstration C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. ■

Exemple 14 La fonction $\theta \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}$.