Suites numériques

On désigne par $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Généralités

1) Notion de suite numérique

Nous avons déjà évoqué la notion de suite numérique (dans le chapitre 5).

Définition 1 (suite numérique) On appelle *suite (numérique)* toute application $u : [\![n_0, +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{K}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$. L'entier n_0 est appelé le rang initial de la suite.

Remarques :

- ⋆ Très souvent, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.
- ⋆ La suite u sera dorénavant notée $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ (le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite sera donc noté u_n au lieu de $u(n)$).
- ⋆ L'ensemble des suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de premier terme $n_0 = 0$ est l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

✎✎✎ **Exercice 1** $u = (n^2 + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = \big(\ln(n-1)\big)_{n \geqslant 2}$ sont des suites.

Dorénavant, nous écrirons les définitions et résultats dans le cas où $n_0 = 0$. Tout ce qui suit s'adapte aisément au cas où n_0 est un entier naturel quelconque. De plus, nous traiterons dans un premier temps les suites numériques à valeurs réelles (*i.e.* pour lesquelles $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

2) Suite majorée, minorée, bornée

Définition 2 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que :

- ⋆ la suite u est *majorée* si :
$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$$
- ⋆ la suite u est *minorée* si :
$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant M$$
- ⋆ la suite u est *bornée* si :
$$\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$$

  Autrement dit, u est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Remarques :

- ⋆ Si une suite est minorée, alors elle admet une infinité de minorants (même chose pour « majorée »).

⋆ La suite u est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, *i.e.* si :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leqslant M$$

Démonstration On raisonne par double implication.

⋆ Supposons que la suite u soit majorée par $M \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -M \leqslant u_n \leqslant M$$

et donc u est bornée.

⋆ Supposons qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad m \leqslant u_n \leqslant M$$

Or :

$$M \leqslant |M| \leqslant |M| + |m| \qquad \text{et} \qquad m \geqslant -|m| \geqslant -(|m| + |M|)$$

En posant $K = |m| + |M|$, on a $K \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -K \leqslant u_n \leqslant K \qquad i.e. \qquad |u_n| \leqslant K$$

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par K. ■

Exemple 1 ⋆ La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (elle est majorée par 1 et est minorée par -1).

⋆ La suite $u = \left(\dfrac{\sin(n)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| = \frac{|\sin(n)|}{n+1} \leqslant 1$$

⋆ La suite $(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 mais n'est pas majorée (puisque $n^2 + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$).

3) Sens de variation d'une suite

Définition 3 (monotonie d'une suite) Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite :

⋆ *croissante* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_{n+1}$$

⋆ *décroissante* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant u_{n+1}$$

Si les inégalités sont strictes dans les inégalités ci-dessus, on parle de monotonie stricte.

⋆ *stationnaire* si :

$$\exists\, c \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = c$$

✎✎✎ **Exercice 2** Étudier la monotonie de la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = n^2 - n + 1$$

Une solution.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) + 1 - n^2 + n - 1 = 2n \geqslant 0$$

donc la suite u est croissante.

Exemple 2 La suite $\left(\left\lfloor \dfrac{4}{n} \right\rfloor\right)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire à partir du rang $n = 5$.

II – Limite d'une suite

1) Suite convergente

La notion de limite d'une suite n'a de sens que pour n qui tend vers $+\infty$.

(a) Définition

Définition 4 (convergence d'une suite) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- ⋆ Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que *la suite u converge vers ℓ* (ou que u *est convergente de limite ℓ*) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ou :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Le nombre ℓ est alors appelé *limite* de la suite u, ce que l'on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

- ⋆ On dit que la suite u est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que u soit convergente de limite ℓ. Lorsqu'une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est *divergente*.

Remarque : la définition peut se reformuler ainsi. Quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie autour de la limite (*i.e.* aussi petite soit-elle), il existe un rang (qui dépend de la précision) à partir duquel les termes de la suite seront ε-proches du nombre ℓ.

Exemple 3 Avec cette définition, vérifions par exemple que $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_\varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On résout :

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon \iff \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \frac{1}{\varepsilon},$$

ce qui est vrai si $n \geqslant \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. En posant $n_\varepsilon = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ (ce nombre est bien un entier naturel non nul), on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n \geqslant n_\varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Exemple 4 Montrons que la suite $u = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente en raisonnant par l'absurde.
Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Pour le choix $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ dans la définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$$

En particulier :

$$|u_{n_0} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad |u_{n_0+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a donc :

$$|u_{n_0} - u_{n_0+1}| \leqslant |u_{n_0} - \ell| + |u_{n_0+1} - \ell| \leqslant 1$$

Mais $|u_{n_0} - u_{n_0+1}| = 2$ donc on obtient une absurdité.

(b) Premières propriétés

Proposition 1 (unicité de la limite d'une suite numérique) Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est unique.

Démonstration Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. On raisonne par l'absurde en supposant que u admet deux limites différentes ℓ et ℓ'. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on sait que :

- ⋆ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_\varepsilon$, on ait $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$;
- ⋆ il existe $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n'_\varepsilon$, on ait $|u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$;

Soit $n_0 = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$. Alors $n_0 \geqslant n_\varepsilon$ et $n_0 \geqslant n'_\varepsilon$ donc :

$$|u_{n_0} - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_{n_0} - \ell'| \leqslant \varepsilon$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|\ell - \ell'| \leqslant |u_{n_0} - \ell| + |u_{n_0} - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$$

Finalement, on a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |\ell - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$$

Pour le choix $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{3}$, on a $\varepsilon > 0$ (car $\ell \neq \ell'$ par hypothèse) donc :

$$|\ell - \ell'| \leqslant \frac{2}{3}|\ell - \ell'|$$

Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{1}{3}|\ell - \ell'| \leqslant 0$$

donc $|\ell - \ell'| = 0$ puis $\ell = \ell'$, ce qui est absurde. On en déduit donc qu'il y a unicité de la limite d'une suite convergente. ■

Proposition 2 Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite notée $\ell \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Choisissons $\varepsilon = 1 > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant 1$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |u_n| \leqslant |\ell| + 1$$

En posant $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{n_0 - 1}|, |\ell| + 1)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leqslant M$$

donc la suite u est bornée, ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque : la réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple, la suite $\big((-1)^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais elle diverge.

Proposition 3 Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors :

- ⋆ si u est bornée et si $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$;
- ⋆ si u converge de limite $\ell \in \mathbb{K}$, alors $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite $|\ell|$;
- ⋆ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0$.

Démonstration $\star$ On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |v_n| \leqslant M$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\varepsilon \implies |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$$

Pour tout entier $n \geqslant n_\varepsilon$, on a alors :

$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant |u_n| \times M \leqslant \varepsilon$$

On en conclut donc que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.

$\star$ D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|$$

$\star$ C'est immédiat. ■

Remarque : la réciproque au deuxième point est fausse. Il suffit de considérer la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est divergente, et donc la suite des valeurs absolues converge de limite 1.

Exemple 5 $\dfrac{\sin(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) Limite infinie

Définition 5 (limite infinie) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u *tend vers* $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \geqslant M \qquad (\text{respectivement } u_n \leqslant M)$$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$).

Exemple 6 Justifions, à l'aide de la définition, que $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sqrt{n} \geqslant M \iff n \geqslant M^2$$

Pour le choix $N = \lfloor M^2 \rfloor + 1$, on a bien $\sqrt{n} \geqslant A$ pour tout entier $n \geqslant N$.

Remarque : étant donnée une suite réelle, trois cas peuvent se présenter :

- $\star$ ou bien la suite u converge (elle tend donc vers un élément de $\mathbb{R}$) ;
- $\star$ ou bien la suite u diverge et deux cas peuvent se présenter :
  - — ou bien la suite u tend vers $-\infty$ ou tend vers $+\infty$;
  - — ou bien la suite u n'admet pas de limite (par exemple $u = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Opérations sur les limites

Définition 6 (droite numérique achevée) On appelle droite numérique achevée, notée $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Les règles de calculs dans $\overline{\mathbb{R}}$ sont données dans le tableau suivant :

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{y<0}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{y<0}$	$\boldsymbol{+\infty}$
$\boldsymbol{-\infty}$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$\boldsymbol{x<0}$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
$\mathbf{0}$	F.I.	0	0	0	F.I.
$\boldsymbol{x>0}$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$\boldsymbol{+\infty}$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	F.I.	$+\infty$

L'introduction de $\overline{\mathbb{R}}$ permet d'éviter de traiter plusieurs cas dans les énoncés de certains résultats.

Proposition 4 Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. À condition de ne pas tomber dans un cas détermination, on a :

- ⋆ $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$
- ⋆ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\ell$
- ⋆ $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ell'$

Démonstration Faisons les démonstration dans les cas où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$

- ⋆ Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence d'une suite, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left(\forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\forall n \geqslant n'_\varepsilon,\ |u_n - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

  Soit $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$. Pour tout entier $n \geqslant N_\varepsilon$, on a :

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$$

  Ainsi, $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

- ⋆ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_ε tel que pour tout entier $n \geqslant n_\varepsilon$, on ait $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}$. On multiplie ensuite par $|\lambda|$.
- ⋆ Comme u est convergente, elle est bornée ; notons $M > 0$ un majorant de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)| &\leqslant |u_n| \times |v_n - \ell'| + |\ell'| \times |u_n - \ell| \\ &\leqslant M|v_n - \ell'| + |\ell'| \times |u_n - \ell| \end{aligned}$$

  Fixons maintenant $\varepsilon > 0$.

  - Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(|\ell'| + 1)}$$

- De même, il existe $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n'_\varepsilon, \qquad |v_n - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

En posant $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, on a :

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \qquad |u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ell'$. ■

Proposition 5 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

⋆ $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n > 0$;

⋆ $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.

La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant N}$ est donc convergente.

Démonstration Par définition de la limite (finie), comme $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{\ell}{2}$$

donc :

$$\forall n \geqslant N, \qquad u_n \geqslant \frac{\ell}{2} > 0,$$

ce qui démontre le premier point. Par ailleurs, pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{u_n - \ell}{u_n \ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n|\ell} \leqslant \frac{2|u_n - \ell|}{\ell^2}$$

car on sait que $|u_n| = u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ si $n \geqslant N$. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on en déduit que $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$. ■

Remarque : de même, on peut montrer que si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, alors u est strictement positive à partir d'un certain rang et $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4) Limites et ordre

Proposition 6 ⋆ Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant 0$$

Si u est convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell \geqslant 0$.

⋆ Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. On suppose aussi que :

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n$$

Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration ⋆ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(\forall n \geqslant n_\varepsilon, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon) \qquad i.e. \qquad (\forall n \geqslant n_\varepsilon, \qquad \ell \geqslant u_n - \varepsilon)$$

La suite u étant positive, ceci implique que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \ell \geqslant -\varepsilon$$

Ainsi, ℓ est un majorant de l'ensemble $\big\{ -\varepsilon \,\big|\, \varepsilon > 0 \big\} = \mathbb{R}_-^*$. Par définition de la borne supérieure (c'est le plus petit majorant), on a $\ell \geqslant \sup(\mathbb{R}_-^*) = 0$.

⋆ Il suffit d'appliquer le premier point à la suite positive $w = v - u$. ■

Remarque : le résultat est faux pour des inégalités strictes. Par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

mais $\dfrac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème 1 (d'encadrement ou des gendarmes) Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que :

⋆ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$;

⋆ $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$, on ait :

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

D'après le deuxième point, on a pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon \quad \text{donc} \quad \ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon \quad i.e. \quad |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. ■

✎✎✎ **Exercice 3** Déterminer la limite de la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{\lfloor n + \ln(n) \rfloor}{n}$$

Il existe une version « limite infinie » du théorème précédent.

Théorème 2 (de comparaison) Soient $u, v \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n$$

⋆ Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

⋆ Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Démonstration immédiat en utilisant la définition de la limite infinie ■

Exemple 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lfloor n \rfloor \geqslant n - 1$ donc $\lfloor n \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

5) Suites extraites

Définition 7 (suite extraite) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle *suite extraite* de u toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Extraire une sous-suite d'une suite donnée via une application φ revient à ne conserver que les termes u_k dont les indices k appartiennent à l'ensemble $\varphi(\mathbb{N})$.

Exemple 8
- ⋆ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite u (ici, $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$)
- ⋆ $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite extraite de la suite u (ici, $\varphi : n \longmapsto n+1$)
- ⋆ les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite u (on a $\varphi : n \longmapsto 2n$ pour la première suite)
- ⋆ si $u = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite extraite constante égale à 1

Lemme 1 Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi(n) \geqslant n$$

Démonstration On utilise un raisonnement par récurrence simple.
- ⋆ Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui est minoré par 0, on a bien $\varphi(0) \geqslant 0$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\varphi(n) \geqslant n$. Comme $n+1 > n$, on a par stricte croissance de φ :

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$$

  en utilisant l'hypothèse de récurrence. Comme $\varphi(n+1)$ est un entier, l'inégalité $\varphi(n+1) > n$ se réécrit $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. L'inégalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, le lemme est démontré. ■

Proposition 7 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite admettant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Toute suite extraite de u admet également ℓ pour limite.

Démonstration Il faut distinguer les trois cas $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = -\infty$ et $\ell = +\infty$. Faisons la démonstration dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Pour tout entier $n \geqslant n_\varepsilon$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_\varepsilon$ (d'après le lemme) donc :

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente de limite ℓ. ■

Corollaire 1 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- ⋆ S'il existe une suite extraite de u qui n'admet pas de limite, alors la suite u n'admet pas de limite.
- ⋆ Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases}$$

Démonstration ⋆ C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

⋆ On traite à nouveau le cas $\ell \in \mathbb{R}$. Le sens direct est une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus. On suppose que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait :

$$|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Pour tout entier $n \geqslant 2N+1$, on a alors $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a donc bien $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. ■

Exemple 9 La suite $u = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie). En effet, si celle-ci admettait une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (constantes égales à 1 et à -1 respectivement) admettraient la même limite, ce qui n'est pas le cas.

III – Théorèmes d'existence de limites

1) Cas d'une suite monotone

Proposition 8 (théorème de la limite monotone) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. Alors :

⋆ si u est majorée, alors u converge ;

⋆ sinon, u est divergente et a pour limite $+\infty$.

Démonstration ⋆ Supposons que la suite u soit croissante et majorée. Considérons l'ensemble des termes de la suite :

$$\mathscr{E} = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient par exemple u_0) et majorée (par hypothèse) ; elle admet donc une borne supérieure notée ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\ell - \varepsilon$ ne majore par $\mathscr{E}$ (par définition de la borne supérieure ℓ de $\mathscr{E}$) donc il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_\varepsilon} \geqslant \ell - \varepsilon$. Comme la suite u est croissante, on a :

$$\forall n \geqslant N, \qquad u_n \geqslant u_{n_\varepsilon} \geqslant \ell - \varepsilon$$

Par ailleurs, on sait aussi que la suite est majorée par ℓ donc :

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon, \qquad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

ce qui implique que la suite u converge de limite ℓ.

⋆ Supposons que la suite u soit croissante et non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Comme u n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant A$. Or u est croissante donc :

$$\forall n \geqslant N, \qquad u_n \geqslant u_N \geqslant A$$

On en déduit bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. ■

Remarque : on a un résultat analogue pour les suites décroissantes (en particulier, toute suite décroissante et minorée est convergente).

✎✎✎ **Exercice 4** Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$. Justifier que la suite u est monotone et convergente.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{\left[\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\right]}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1\right)}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

donc u est décroissante. De plus, elle est majorée par 1 (car $\cos \leqslant 1$). D'après le théorème de la limite monotone, u converge.

2) Suites adjacentes

Définition 8 (suites adjacentes) Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u et v sont *adjacentes* si :

- ⋆ u est croissante ;
- ⋆ v est décroissante ;
- ⋆ et $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

✎✎✎ **Exercice 5** On considère les suites u, v et w définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \qquad v_n = u_{2n} \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{2n+1}$$

Montrer que les suites v et w sont adjacentes.

Solution.

- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+2)} \geqslant 0$$
donc la suite v est croissante. On montre de la même manière que la suite w est décroissante.
- ⋆ Enfin,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n - w_n = \frac{1}{2n+1}$$
qui tend clairement vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

L'intérêt de la notion d'adjacence repose dans la proposition suivante.

Proposition 9 Deux suites adjacentes sont convergentes de limite commune.

Démonstration Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec u croissante et v décroissante.

- ⋆ Montrons que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$
La première inégalité est une conséquence immédiate de la croissance de u, la dernière provient de la décroissance de v. On sait par ailleurs que la suite $u - v$ converge de limite 0. Par l'absurde, supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > v_N$. Les monotonies de u et v entraînent alors que :
$$\forall n \geqslant N, \qquad v_n \leqslant v_N < u_N \leqslant u_n$$
ce qui implique que :
$$\forall n \geqslant N, \qquad u_N - v_N \leqslant u_n - v_n$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient donc que $u_N - v_N \leqslant 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Les inégalités annoncées sont donc établies.
- ⋆ La suite u est croissante et majorée par v_0 donc elle converge ; notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.
- ⋆ On a $v = u + (v - u)$ qui est une somme de deux suites convergentes donc v converge de limite $\ell + 0 = \ell$.

Finalement, les suites u et v sont convergentes de même limite. ■

Remarque : on peut montrer que les suites u, v et w de l'exemple précédent convergent de limite $\ln(2)$.

3) Théorème de Bolzano-Weierstrass

On sait que toute suite de réels convergente est bornée et que la réciproque est fausse. Le théorème très important suivant fournit une réciproque partielle.

Théorème 3 (de Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Par exemple, la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le théorème affirme qu'il existe $\ell \in [-1,1]$ et une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(\sin(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente de limite ℓ.

Démonstration Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Il existe alors $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x \leqslant u_n \leqslant y$$

On va construire par récurrence deux suites de réels $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telles que :

— $\forall n \in \mathbb{N},\ x \leqslant a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n \leqslant y$;
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, le segment $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u ;
— a est croissante, b est décroissante ;
— $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \dfrac{x-y}{2^n}$.

Si ces propriétés sont réunies, alors les suites a et b sont adjacentes (en effet, le dernier point implique que la suite $b-a$ tend vers 0). Ces suites convergent donc de même limite notée $\ell \in \mathbb{R}$. Le premier point et le théorème d'encadrement impliquent donc que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Il reste donc à faire la construction.

⋆ Pour $n = 0$, il suffit de poser $a_0 = x$, $b_0 = y$ et $\varphi(0) = 0$.

⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir construit $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ et les nombres $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ vérifiant les quatre propriétés précédentes. Notons c le milieu du segment $[a_n, b_n]$. On peut écrire que :

$$[a_n, b_n] = [a_n, c] \cup [c, b_n]$$

D'après le deuxième point, l'un des deux segment $I = [a_n, c]$ ou $J = [c, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u :

— si I contient une infinité de termes de u, alors on pose $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c$ et :

$$\varphi(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, u_k \in I\right\}$$

— sinon, c'est J qui vérifie cette propriété et on pose $a_{n+1} = c$, $b_{n+1} = b_n$ et :

$$\varphi(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, u_k \in J\right\}$$

Dans les deux cas, on a bien $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{y-x}{2^{n+1}}$.

La construction est terminée. ■

IV – Suites à valeurs complexes

Dans $\mathbb{C}$, on ne peut pas parler de suite complexe majorée, minorée, croissante, décroissante.

1) Suites complexes bornées

Si $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite complexe, on peut naturellement lui associer les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (ou encore $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$).

Définition 9 (suite complexe bornée) Soit $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que z est *bornée* si la suite (réelle) $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exemple 10 ⋆ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la suite $(\mathrm{e}^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

⋆ Par contre, la suite $(\mathrm{e}^{(1+i)n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas car :

$$|\mathrm{e}^{(1+i)n}| = \mathrm{e}^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Remarque : on peut montrer que $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ le sont.

2) Limite d'une suite complexe

La définition de la convergence d'une suite complexe est la même que pour une suite réelle (à ceci près que la valeur absolue est ici un module).

Définition 10 Soit $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On On dit que z est convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \geqslant n_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre facilement la proposition suivante.

Proposition 10 Soient $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $\ell = a + ib$. Alors :

$$z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b \in \mathbb{R} \\ \ell = a + ib \end{cases}$$

Démonstration exercice ■

Remarque : on ne peut par parler de limite infinie pour une suite complexe.

Aucun théorème en lien avec des inégalités ou à la notion de la monotonie se généralise au cas complexe (en raison de l'absence d'ordre naturel sur $\mathbb{C}$). Les autres résultats énoncés dans les paragraphes précédentes se généralisent avec les mêmes démonstrations, en particulier :
- les opérations sur les limites (limites dans $\mathbb{C}$) ;
- les théorèmes liés aux suites extraites, dont le théorème de Bolzano-Weierstrass.

V – Retour sur la topologie du corps des réels

Nous revenons dans ce paragraphe sur certains résultats évoqués dans la partie sur les nombres réels et les démontrons/complétons.

1) Caractérisation séquentielle des bornes inférieures/supérieures

Proposition 11 Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- ⋆ Si X est majorée, alors il existe une suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\sup(X)$.
- ⋆ Sinon, il existe une suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ qui diverge de limite $+\infty$ (et on pose $\sup(X) = +\infty$).

On a un résultat analogue pour la borne inférieure de X.

Démonstration Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- ⋆ On suppose que X est majorée. Posons $M = \sup(X)$ (qui existe puisque X est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M - \dfrac{1}{n}$ ne majore pas X donc il existe $x_n \in X$ tel que :

$$M - x_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Comme M majore X, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant M - x_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Ainsi, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$.

* $\star$ On suppose que X n'est pas majorée. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in X$ tel que $x_n \geqslant n$, ce qui permet de conclure. $\blacksquare$

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 2 (caractérisation séquentielle de la borne supérieure) Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Alors :

$$M = \sup(X) \iff \begin{cases} \forall x \in X,\ x \leqslant M \\ \exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M \end{cases}$$

Il existe un résultat analogue pour la borne inférieure.

Démonstration $\boxed{\Longleftarrow}$ La première propriété montre que M est un majorant de l'ensemble M. Il s'agit de montrer que c'est le plus petit. Supposons que $\sup(X) < M$. Par définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} > \sup(X)$, ce qui contredit la définition de $\sup(X)$. Donc $M = \sup(X)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Cette implication fait l'objet de la proposition précédente. $\blacksquare$

2) Densité

Définition 11 Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que D est *dense dans* $\mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, l'intersection $I \cap X$ est non vide. On note alors $\overline{D} = \mathbb{R}$.

Exemple 11 On sait que $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Proposition 12 (caractérisation séquentielle de la densité) Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Alors :

$$X \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\right)$$

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme X est dense dans $\mathbb{R}$, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad X \cap \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\neq \varnothing$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $x_n \in X \cap \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$. Il est alors clair que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non vide et $x_0 \in I$. Par convexité de I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$$

Or, on sait par hypothèse qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 donc :

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \qquad x_n \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

et donc, en particulier, $x_N \in I \cap X$. $\blacksquare$

Exemple 12 On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^p} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \right\}$$

Alors $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$.

Justification. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{D}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x - \frac{1}{10^n} \leqslant d_n \leqslant x$$

donc, d'après le théorème d'encadrement, on a $d_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

VI – Les suites usuelles à connaître

Il y a quatre type de suites à connaître.

1) Suites arithmétiques et suites géométriques

Définition 12 Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{C}$. On dit que :

- ⋆ u est une suite *arithmétique de raison a* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + a$$

- ⋆ u est une suite *géométrique de raison a* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = a u_n$$

Proposition 13 (terme général) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- ⋆ Si u est arithmétique de raison a, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + an$$

Plus généralement, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_{n_0} + a(n - n_0)$$

- ⋆ Si u est géométrique de raison a, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 a^n$$

Plus généralement :

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_{n_0} q^{n - n_0}$$

Démonstration Il suffit de faire une récurrence. ■

2) Suites arithmético-géométriques

Définition 13 Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b)in\mathbb{C}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque : si $a = 1$, on retrouve la notion de suite arithmétique et si $b = 0$, on retrouve celle de suite géométrique. Dans la suite, on suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique, on peut procéder comme suit :

1. on cherche $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\ell = a\ell + b$ (ℓ est le point fixe de la relation de récurrence) ;
2. on vérifie que la suite $u - \ell = (u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ;
3. on conclut en invoquant les résultats connus sur les suites géométriques.

✎✎✎ **Exercice 6** Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Définition 14 Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est une *suite récurrente linéaire d'ordre deux* s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Pour déterminer le terme général d'une telle suite, on considère son *équation caractéristique*. Il s'agit de l'équation du second degré :

$$x^2 - ax - b = 0 \qquad (E)$$

Théorème 4 (terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

- ⋆ Si (E) a deux racines distinctes r et s, alors :

$$\exists\, A, B \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = Ar^n + Bs^n$$

- ⋆ Si (E) a une unique racine q, alors :

$$\exists\, A, B \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (A + Bn)q^n$$

Démonstration admise à ce stade ■

Remarques :

- ⋆ On détermine A et B à l'aide des conditions initiales (*i.e.* à l'aide des valeurs de u_0 et u_1). Par exemple, pour le premier cas ($\Delta \neq 0$), il s'agira de résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & A + B \\ u_1 & = & Ar + Bs \end{array} \right.$$

★ Si $\Delta < 0$ et si u est à valeurs réelles, alors on peut aussi écrire u sous la forme suivante :

$$\exists\, C, D \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (C\cos(n\theta) + D\sin(n\theta))u^n,$$

où l'on a écrit les racines r et s de l'équation caractéristique sous forme trigonométrique :

$$r, s = u\,\mathrm{e}^{\pm\, i\theta}$$

✎✎✎ **Exercice 7** Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = -u_n$$

Une solution.
Il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u_n = Ai^n + B(-i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On trouve :

$$\alpha = \frac{1-i}{2} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1+i}{2}$$

VII – Suites définies par une relation de récurrence

On s'intéresse ici aux suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les quatre types de suites vus précédemment sont de ce type. On souhaite donc généraliser.

1) Notion d'intervalle stable

L'exemple ci-dessous motive la définition suivante.

Exemple 13 Considérons la fonction $f : x \longmapsto 2 + \sqrt{1-x}$ qui est définie sur $]-\infty, 1]$. Peut-on définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

La réponse est non. En effet, on a $u_1 = 2$, et comme u_1 n'appartient pas au domaine de définition de f, la suite n'est pas définie.

On est donc confronté à un premier problème : pour que la suite existe, il faut que chaque terme de la suite u appartienne au domaine de définition de la fonction.

Proposition/définition 1 (ensemble stable par f) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et $f : A \longrightarrow A$ une fonction (on dit que A est *stable* par f). Pour tout $x \in A$, on peut définir par récurrence la suite u telle que $u_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

Démonstration C'est immédiat par récurrence : si pour un entier n, on a $u_n \in A$, alors u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} \in A$ par définition de f. ■

Exemple 14 L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$. Ainsi, étant donné $u_0 \in \mathbb{R}_+$, on peut considérer la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

Une fois que la suite est bien définie, on s'intéresse à la convergence de celle-ci. On aura souvent recours au théorème de la limite monotone.

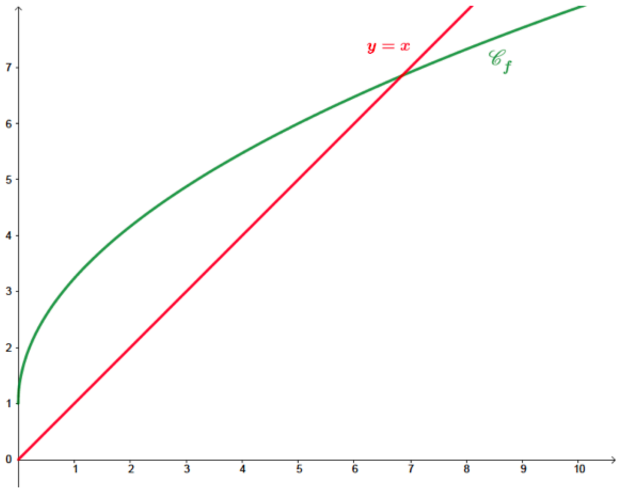
✎✎✎ **Exercice 8** 1. On considère la suite de l'exemple précédent (avec $u_0 = 2$).
   (a) Étudier la monotonie de u.
   (b) Déterminer la limite de u.

2. Même question avec la suite u définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

2) Représentation graphique

On se place dans un repère orthonormal.



3) Résultats généraux

Sur le graphique précédent, et lorsqu'il y a convergence de la suite u, la limite semble être un *point fixe* de f (*i.e.* un nombre réel x tel que $f(x) = x$).

Proposition 14 Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ une fonction. Soit $u_0 \in I$ et la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ⋆ Si u est convergente de limite $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, *i.e.* $f(\ell) = \ell$.
- ⋆ Si f est croissante sur I, alors u est monotone.
- ⋆ Si pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leqslant x$, alors u est décroissante.
- ⋆ Si pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geqslant x$, alors u est croissante.
- ⋆ Si f est décroissante sur I, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Leur sens de variation dépend du signe de $u_2 - u_0$.

Démonstration ⋆ Le premier point est admis à ce stade (voir le chapitre 13).

- ⋆ Supposons que $u_0 \leqslant u_1$. On montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$, *i.e.* que u est croissante. Si $u_0 \geqslant u_1$, alors u est décroissante.
- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in A$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$. La suite u est donc bien décroissante.
- ⋆ Le raisonnement est analogue.
- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$ et $f \circ f$ est croissante sur I (puisque f décroît). Si par exemple $u_0 \leqslant u_2$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (récurrence immédiate). On en déduit que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car (par décroissante de f) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$$

✎✎✎ **Exercice 9** On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n^3}$.