Un corrigé des exercices

Commentaires

⋆ Toutes les notions abordées dans les exercices seront retravaillées en détail au cours de l'année. Il ne faut donc pas paniquer si vous rencontrez des difficultés. La motivation principale de ces exercices est de faire des mathématiques pendant les vacances.

⋆ Pour les exercices 5 et 6, on utilise bien entendu les formulaires de dérivation et d'intégration. Pour ceux-ci, seuls les résultats finaux sont donnés. Savoir dériver et intégrer une fonction sont des compétences de base pour les mathématiques et la physique-chimie. Vous pouvez bien entendu aussi retravailler les exercices faits sur ces thèmes en classe de Terminale.

⋆ Les corrigés qui suivent sont normalement très détaillés. Vous comprendrez au cours de l'année que la rédaction en mathématiques est essentielle. Ces *rédactions types* seront bien entendues expliquées et répétées l'année prochaine.

Exercice 1 (développer, réduire, factoriser).

1. Soient a, b et c des nombres réels.
   (a) On a :
   $$A = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$
   (b) De même :
   $$B = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
   (c) En procédant de la même manière, il vient :
   $$C = (4a^2 - 4ab + b^2)(2a - b) = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$$
   (d) On a :
   $$D = (x^2 + 3x + 2)(3 - x) = -x^3 + 7x + 6$$
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) On a :
   $$E = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$$
   (b) De la même façon :
   $$F = 1^2 - (x^2)^2 = (1 - x^2)(1 + x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)$$
   (c) Les racines du trinôme du second degré $X^2 - 5X + 6$ sont 2 et 3 donc :
   $$G = (x-2)(x-3)$$
   (d) On a ici $H = (2x-1)^2$.
   (e) On a :
   $$\begin{aligned} I = (6x-8)(4x-5) + (6x)^2 - 8^2 &= (6x-8)(4x-5) + (6x-8)(6x+8) \\ &= (6x-8)\big[(4x-5) + (6x+8)\big] \\ &= (6x-8)(10x+3) \end{aligned}$$

(f) On factorise par $x-1$:

$$J=(x-1)^2+(x-1)(x+1)=(x-1)\big[(x-1)+(x+1)\big]=2x(x-1)$$

(g) On remarque que 1 est racine du polynôme $X^3-6X^2+11X-6$ donc on peut le factoriser par $X-1$:

$$K=(x-1)\underbrace{(x^2-5x+6)}_{=G}=(x-1)(x-2)(x-3)$$

(h) Comme x est positif, on peut écrire que :

$$L=\left(\sqrt{x}\right)^2-6\sqrt{x}+9=\left(\sqrt{x}-3\right)^2$$

(i) On peut factoriser comme suit :

$$M=x^2(x-1)+(x-1)=(x^2+1)(x-1)$$

(j) On remarque que 1 est une racine du polynôme $X^4-3X^3+X^2+3X-2$ donc on peut le factoriser par $X-1$. On obtient :

$$N=(x-1)(x^3-2x^2-x+2)$$

Comme 1 est racine de X^3-2X^2-X+2, on peut le factoriser par $X-1$:

$$N=(x-1)(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)^2(x+1)(x-2)$$

puisque les racines du trinômes X^2-X-2 sont -1 et 2.

(k) On a :

$$O=x(y+1)+(y+1)=(x+1)(y+1)$$

Commentaires

⋆ Soient a,b,c des nombres réels tels que $a\neq 0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=ax^2+bx+c$.

— Si le trinôme du second degré ax^2+bx+c admet deux racines réelles distinctes notées x_- et x_+, alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=a(x-x_-)(x-x_+)$$

— Si le trinôme du second degré ax^2+bx+c admet une unique racine réelle notée x_0, alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=a(x-x_0)^2$$

⋆ Si P est un polynôme dont $x_0\in\mathbb{R}$ est une racine (c'est-à-dire $P(x_0)=0$), alors on peut factoriser le polynôme P par $X-x_0$. Par exemple, si $P=X^4+bX^3+cX^2+dX+e$ est de degré 4 et si x_0 est une racine de P, alors il existe $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tels que :

$$P=(X-x_0)(\alpha X^3+\beta X^2+\gamma X+\delta)$$

On obtient les valeurs de α,β,γ et δ en développant le produit de droite et en utilisant l'unicité des coefficients d'un polynôme (nous verrons d'autres méthodes plus efficaces pour trouver les coefficients en cours d'année).

3. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. En utilisant les identités remarquables et/ou les propriétés de l'exponentielle, on obtient :

$$P=\left(\mathrm{e}^{2x+3}\right)^{-3}\times\left(\mathrm{e}^{3x-1}\right)^{-2}=\mathrm{e}^{-12x-7}$$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$. De la même manière, on a (il suffit de développer) :

$$Q=\left(\mathrm{e}^{\pi x}+\mathrm{e}^{-\pi x}\right)^2-\left(\mathrm{e}^{\pi x}-\mathrm{e}^{-\pi x}\right)^2=4$$

En utilisant cette fois les propriété du logarithme (et la factorisation $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ pour S), on obtient :

(c) $R=\ln\left(\dfrac{25\sqrt{5}}{9}\right)=\dfrac{5}{2}\ln(5)-2\ln(3)$

(d) $S = \ln(a+b) + \ln(a-b) - \big(\ln(a-b) + \ln(a+b)\big) = 0$

(e) $T = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a^4) - \ln(a^3) + \ln(1) = 0$

4. La fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \in \mathscr{D}_f \iff x^2 + 2x > 0$$

On obtient le signe de $x^2 + 2x$, en fonction de x, par exemple à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut conclure que :

$$\mathscr{D}_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

En procédant de la même manière, on a :

$$\mathscr{D}_g =]-2, 1[$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$8^{n+1} + 8^n = 8 \times 8^n + 8^n = 9 \times 8^n \qquad \text{donc} \qquad (8^{n+1} + 8^n)^2 = 81 \times (8^n)^2 = 81 \times (64)^n$$

et, de la même manière[1] :

$$4^n - 4^{n-1} = 1 \times 4^n - \frac{1}{4} \times 4^n = \frac{3}{4} \times 4^n \qquad \text{puis} \qquad (4^n - 4^{n-1})^3 = \frac{27}{64} \times (4^n)^3 = \frac{27}{64} \times (64)^n$$

car $4^3 = 64$ et en utilisant encore les règles sur les puissances[2]. En quotientant les expressions obtenues, il vient :

$$\alpha_n = \frac{81 \times (64)^n}{\frac{27}{64} \times (64)^n} = \frac{81 \times 64}{27} = 192$$

Finalement, α_n ne dépend pas de n, ce qu'il fallait établir.

Exercice 2 (équations).

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de chacune des équations proposées.

1. Le discriminant du polynôme du second degré $X^2 + 4X - 3$ est égal à $16 + 12 = 28 > 0$ donc celui-ci admet deux racines réelles distinctes, à savoir :

$$\frac{-4 - \sqrt{28}}{2} = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{2} = -2 - \sqrt{7} \qquad \text{et} \qquad -2 + \sqrt{7}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-2 - \sqrt{7}, -2 + \sqrt{7}\right\}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $X = \mathrm{e}^x$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^x + 2 = 0 \iff \left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 3\,\mathrm{e}^x + 2 = 0 &\iff X^2 - 3X + 2 = 0 \\ &\iff X = 1 \text{ ou } X = 2 \\ &\iff \mathrm{e}^x = 1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = 2 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \ln(2) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{0, \ln(2)\right\}}$$

1. puisque $4^{-1} = \frac{1}{4}$
2. en l'occurrence $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$

3. Pour qu'un nombre réel x soit solution de l'équation, il faut que $x \neq 0$ et $x \neq \frac{1}{2}$. Soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x} = \frac{x}{2x-1} \iff (x-1)(2x-1) = 2x^2 &\iff 2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 \\ &\iff -3x + 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{3} \notin \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$$

4. On propose deux méthodes.

   ⋆ **Première méthode :** *avec un argument analytique*
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que la fonction cube $t \longmapsto t^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

   $$8x^3 - 27 = 0 \iff x^3 = \frac{27}{8} \iff x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

   Par conséquent :

   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

   ⋆ **Deuxième méthode :** *avec un argument algébrique*
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\frac{3}{2}$ est une racine du polynôme $8X^3 - 27$, on peut factoriser ce polynôme par $X - \frac{3}{2}$:

   $$8X^3 - 27 = 8\left(X - \frac{3}{2}\right)\left(X^2 + \frac{3}{2}X + \frac{9}{4}\right)$$

   Par conséquent :

   $$\begin{aligned} 8x^3 - 27 = 0 &\iff 8\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) = 0 \\ &\iff x - \frac{3}{2} = 0 \text{ ou } x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 0 \end{aligned}$$

   Le trinôme du second degré $X^2 + \frac{3}{2}X + \frac{9}{4}$ n'admet pas de racine réelle car son discriminant est égal à $\frac{9}{4} - 9 = -\frac{27}{4} < 0$. L'ensemble des solutions est donc :

   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$2x^2 - x + 3 = x^2 - x + 5 \iff x^2 = 2 \iff x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$

donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}}$$

6. La fonction inverse $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction racine carrée $t \longmapsto \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour qu'un nombre réel x soit solution de l'équation, il faut que :

$$4 - x^2 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2+1}{4-x^2} \geqslant 0$$

La première équation nous donne les conditions $x \neq -2$ et $x \neq 2$. De plus, le signe de $\dfrac{x^2+1}{4-x^2}$ est celui de $4-x^2 = (2-x)(2+x)$ car le numérateur x^2+1 est strictement positif (quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$). Pour que x soit solution, il faut donc que $x \in]-2,2[$.

Soit $x \in]-2,2[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x^2+1}{4-x^2}} = 1 &\iff \frac{x^2+1}{4-x^2} = 1 \qquad \text{(par stricte croissance de } t \longmapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\
&\iff x^2+1 = 4-x^2 \\
&\iff x^2 = \frac{3}{2} \\
&\iff x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$$

Ainsi :

$$x^3+x^2-x-1 = 0 \iff (x-1)(x+1)^2 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Ainsi, :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1, 1\}}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction racine carrée étant à valeurs positives, on remarque que pour que x soit solution de l'équation, il faut que x soit supérieur ou égal à 1. Soit donc $x \in [1,+\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}
x-1 = \sqrt{x+2} \iff (x-1)^2 = x+2 &\iff x^2-2x+1 = x+2 \\
&\iff x^2-3x-1 = 0 \\
&\iff x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ ou } x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}
\end{aligned}$$

Or $9 \leqslant 13 \leqslant 16$ donc $3 \leqslant \sqrt{13} \leqslant 4$ donc :

$$\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{3+\sqrt{13}}{2} \geqslant \frac{6}{2} = 3 \geqslant 1$$

L'équation admet donc une unique solution, à savoir $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}}$$

9. Pour qu'un nombre réel x soit solution de l'équation, il faut que $x \neq 1$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x} + 4 = \frac{2x}{x-1} &\iff \frac{x+4(1-x)}{1-x} = \frac{2x}{x-1} \\
&\iff \frac{-3x+4}{1-x} = \frac{2x}{x-1} \\
&\iff (-3x+4)(x-1) = 2x(1-x) \\
&\iff (-3x+4)(x-1) - 2x(1-x) = 0 \\
&\iff (x-1)\big((-3x+4)-(-2x)\big) = 0 \\
&\iff (x-1)(-x+4) = 0 \\
&\iff x = 1 \text{ ou } x = 4 \\
&\iff x = 4 \qquad (\text{car } x \neq 1)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{4\}}$$

10. Pour qu'un nombre réel x soit solution de l'équation, il faut que :

$$x+1 \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 1-x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1-x} \neq 0$$

En effet, la fonction racine carrée $t \longmapsto \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ tandis que la fonction inverse $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour que $x \in \mathbb{R}$ soit solution, il faut donc que $x \in [-1, 1[$.
Soit maintenant $x \in [-1, 1[$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} = 1 &\iff \sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \\ &\iff x+1 = 1-x \qquad \text{(par croissance stricte de } t \longmapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a bien $0 \in [-1, 1[$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$$

11. Pour que $x \in \mathbb{R}$ soit solution de l'équation, il faut que $1-x^2 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On résout :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{x-1} = 2 &\iff \frac{-1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x-1} = 2 \\ &\iff \frac{-1-(x+1)}{x^2-1} = 2 \\ &\iff -x-2 = 2(x^2-1) \\ &\iff 2x^2 + x = 0 \\ &\iff x(2x+1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}}$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x^8 - 2x^4 + 1 = 0 &\iff (x^4-1)^2 = 0 \\ &\iff x^4 - 1 = 0 \\ &\iff (x^2-1)(x^2+1) = 0 \\ &\iff x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = -1 \text{ (ce deuxième cas n'est pas possible car } x^2 \geqslant 0) \\ &\iff x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1, 1\}}$$

Commentaire

Il y a un chapitre dans lequel la méthode de résolution d'une équation ou d'une inéquation sera réétudiée.

Exercice 3 (puissances).

1. On a :

$$a = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

2. Comme $2^{2n} = (2^2)^n$, on peut écrire que :

$$b = 3 \times 4^n + 4^n = 4 \times 4^n = 4^{n+1}$$

3. En utilisant les propriétés des puissances, il vient :

$$c = (3 \times 9)^n = (27)^n$$

4. De même :

$$d = 5^{2^n + 2^n} = 5^a = 5^{(2^{n+1})}$$

5. À nouveau :

$$e = (3^n)^n 5^n = 9^n 5^n = (9 \times 5)^n = (45)^n$$

6. En écrivant 4 et 8 comme des puissances de 2, on a :

$$f = 2^n (2^2)^{n+1} (2^3)^{n+2} = 2^n 2^{2(n+1)} 2^{3(n+2)} = 2^{6n+8}$$

7. Ici :

$$g = 3^{2^n \times 2^n} = 3^{(2^{2n})}$$

8. La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$ est celle des termes d'une suite géométrique de raison $2 \neq 1$ donc :

$$h = 1 + 2^0 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 1 + (2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}$$

Exercice 4 (fractions).

1. On a $a = \dfrac{1}{4}$.
2. Et $b = \dfrac{3}{4}$.
3. Ici, $c = \dfrac{3}{2n}$.
4. On réduit au même dénominateur :

$$d = \frac{n + (n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

5. De même :

$$e = \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

6. À nouveau :

$$f = \frac{1 + (n-1)}{(n-1)^2} = \frac{n}{(n-1)^2}$$

7. On a :

$$g = \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}$$

8. De même :

$$h = \frac{1}{(n-1)(n+1)} \times \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

9. On réduit au même dénominateur :

$$i = \frac{(n+1)(n+2) + n(n+2) + n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 5 (dérivation).

1. $f' : x \longmapsto 5x^4 + 2x^3 - 6x + 1$
2. $f' : x \longmapsto \dfrac{9x-1}{2\sqrt{x}}$

Commentaire

> ⋆ On peut dériver f directement comme un produit (*via* la formule $(uv)' = u'v + uv'$), ou on commence par développer le produit avant de dériver.
>
> ⋆ Le nombre $x\sqrt{x}$ s'écrit aussi $x^{\frac{3}{2}}$. La dérivée de $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$ est donc $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (*rappel* : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ pour tout $x \geqslant 0$).

3. $f' : x \longmapsto \dfrac{3}{(x+2)^2}$
4. $f' : x \longmapsto \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$
5. $f' : x \longmapsto 4(4x+1)(2x^2 + x - 1)^3$

Commentaire

> La fonction est ici de la forme u^n. Ne pas oublier le facteur u' quand on dérive !

6. $f' : x \longmapsto \dfrac{\pi}{x^2} \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

Commentaires

> ⋆ La dérivée de $x \longmapsto \cos(u(x))$ est $x \longmapsto -u'(x)\sin(u(x))$ (ok, si vous ne le saviez pas, on va le revoir de toute manière).
>
> ⋆ La dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

7. $f' : x \longmapsto \dfrac{3(3x-4)^2}{(x-1)^4}$

Commentaires

> ⋆ La fonction est à nouveau de la forme u^n.
>
> ⋆ On utilise aussi la formule de dérivation d'un quotient.

8. $f' : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 6 (intégration).

Notons à chaque fois F une primitive de la fonction f sur le domaine indiqué.

1. $F : x \longmapsto \dfrac{x^5}{5} - x^4 + x^2 + x$
2. $F : x \longmapsto \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{3x}{2}$
3. $F : x \longmapsto \dfrac{-4}{x} - \ln(x)$

Commentaire

Il suffit d'écrire $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ et d'utiliser le formulaire : une primitive de $x \longmapsto x^n$ est...

4. $F : x \longmapsto \dfrac{(x+2)^4}{4}$
5. $F : x \longmapsto \dfrac{(3x^2-1)^5}{15}$
6. $F : x \longmapsto \ln(|x-4|)$, c'est-à-dire $F : x \longmapsto \ln(x-4)$ car, pour tout $x \in]4, +\infty[$, on a $x - 4 > 0$.
7. $F : x \longmapsto \ln(|x^2-x|)$, c'est-à-dire $F : x \longmapsto \ln(x-x^2)$ car, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $x^2 - x = x(x-1) < 0$.
8. $F : x \longmapsto \dfrac{-1}{3(3x-1)}$
9. $F : x \longmapsto 2\sqrt{2x+1}$
10. $F : x \longmapsto -\,\mathrm{e}^{-x+1}$
11. $F : x \longmapsto \dfrac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$
12. $F : x \longmapsto \dfrac{1}{3}\sin(3x)$

Exercice 7 (intégrations par parties).

Commentaire

Soient a et b deux nombres réels et u, v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment délimité par a et b et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque : une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I (nous étudierons cette notion l'année prochaine).

1. ⋆ **Calcul de l'intégrale *I***

Posons :

$$u'(x) = \mathrm{e}^x \qquad v(x) = x$$
$$u(x) = \mathrm{e}^x \qquad v'(x) = 1$$

La formule d'intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e} - \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 \\ &= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{I = 1}$$

⋆ **Calcul de l'intégrale *J***

Posons :

$$u'(x) = x^2 \qquad v(x) = \ln(x)$$
$$u(x) = \frac{x^3}{3} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} J = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x \\ = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left(\frac{\mathrm{e}^3}{9} - \frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{J = \frac{2\,\mathrm{e}^3 + 1}{9}}$$

⋆ **Calcul de l'intégrale K**
Posons :

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = \sin(\ln(x))$$
$$u(x) = x \qquad v'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} K &= \Big[x\sin(\ln(x))\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}\,\sin(1) - \underbrace{\sin(\ln(1))}_{=0} - \underbrace{\int_1^{\mathrm{e}} \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x}_{\text{notée } \tilde{K}} \end{aligned}$$

Pour effectue une seconde intégration par parties sur l'intégrale $\tilde{K}$ en posant :

$$u'(x) = 1 \qquad v(x) = \cos(\ln(x))$$
$$u(x) = x \qquad v'(x) = -\frac{\sin(\ln(x))}{x}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \Big[x\cos(\ln(x))\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{-\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}\,\cos(1) - 1 + \int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}\,\cos(1) - 1 + K \end{aligned}$$

En injectant l'expression de $\tilde{K}$ en fonction de K dans l'égalité précédente, on obtient :

$$K = \mathrm{e}\,\sin(1) - \big(\mathrm{e}\,\cos(1) - 1 + K\big)$$

En isolant finalement K dans cette équation, il vient :

$$\boxed{K = \frac{1 + \mathrm{e}\,(\sin(1) - \cos(1))}{2}}$$

2. (a) On propose deux méthodes.
   ⋆ **Première méthode (la plus rapide).**
   Pour tout $x \in [1, 2]$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

   donc :

$$\boxed{\text{les nombres réels } a = 1 \text{ et } b = -1 \text{ conviennent}}$$

   ⋆ **Deuxième méthode (en procédant par identification).**
   Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in [1, 2], \qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned} \left(\forall x \in [1, 2],\ f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}\right) &\iff \left(\forall x \in [1, 2],\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}\right) \\ &\iff \big(\forall x \in [1, 2],\ 1 = (a+b)x + a\big) \end{aligned}$$

   Pour que cette dernière assertion soit vraie, il *suffit* que $a + b = 0$ et que $a = 1$. On obtient à nouveau $a = 1$ et $b = -1$. Ainsi :

$$\boxed{\text{les nombres réels } a = 1 \text{ et } b = -1 \text{ conviennent}}$$

(b) En utilisant la décomposition obtenue à la question précédente, on a :

$$L = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \, \mathrm{d}x = \Big[\ln(x) - \ln(x+1)\Big]_1^2 = (\ln(2) - \ln(3)) - (\ln(1) - \ln(2))$$

Ainsi :

$$\boxed{L = 2\ln(2) - \ln(3)}$$

(c) Posons :

$$u'(t) = \frac{1}{t^2} \qquad\qquad v(t) = \ln(1+t)$$

$$u(t) = -\frac{1}{t} \qquad\qquad v'(t) = \frac{1}{1+t}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} M = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{t(1+t)} \, \mathrm{d}t &= -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} \, \mathrm{d}t \\ &= \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2} + L \end{aligned}$$

La valeur de L obtenue à la question précédente permet de conclure que :

$$\boxed{M = 3\ln(2) - \frac{3\ln(3)}{2}}$$

Exercice 8 (récurrence).

Commentaire

> Le raisonnement par récurrence sera retravaillé en début d'année. La rédaction est importante.

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
   - ⋆ D'une part, on sait que $u_0 = 0$ (donnée de l'énoncé) et, d'autre part,

     $$\frac{0 \times (0-1)}{2} = 0$$

     On a donc bien l'égalité $u_0 = \dfrac{0 \times (0-1)}{2}$. Autrement dit, l'égalité est vraie au rang $n = 0$.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a l'égalité $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Montrons qu'alors on a aussi $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)n}{2}$. On sait que $u_{n+1} = u_n + n$ donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient :

     $$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} &= \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{(n+1)\big((n+1)-1\big)}{2} \end{aligned}$$

     L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.
   - ⋆ Par principe de récurrence, on peut conclure que :

   Finalement :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{n(n-1)}{2}}$$

2. On raisonne par récurrence.
   - ⋆ On a $\left(\dfrac{1\times(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^3$. La propriété est donc vraie au rang $n=1$.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On veut montrer que :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2)(n^2+4n+4)}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par principe de récurrence simple, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

3. (a) On a $u_1 = (u_0)^2$ puis :

$$u_2 = (u_1)^2 = (u_0^2)^2 = (u_0)^{2\times 2} = (u_0)^4 \qquad \text{puis} \qquad u_3 = (u_2)^2 = \left((u_0)^4\right)^2 = (u_0)^8$$

De la même manière, on trouve que $u_4 = (u_0)^{16}$.

(b) On émet la conjecture suivante [3] :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (u_0)^{2^n}$$

Démontrons la conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
   - ⋆ On a $(u_0)^{2^0} = u_0^1 = u_0$ donc l'égalité est vérifiée au rang $n=0$.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = (u_0)^{2^n}$. Montrons alors que $u_{n+1} = (u_0)^{2^{n+1}}$. Par définition de la suite, on a $u_{n+1} = (u_n)^2$. L'hypothèse de récurrence nous donne ensuite :

$$\begin{aligned}u_{n+1} = \left((u_0)^{2^n}\right)^2 &= (u_0)^{2^n\times 2} \qquad \text{(propriétés sur les puissances)}\\ &= (u_0)^{2^{n+1}}\end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (u_0)^{2^n}}$$

3. En effet, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ et $16 = 2^4$.

Exercice 9 (théorème de la bijection).

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et produit de fonctions qui le sont [4]. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g'(x) = \mathrm{e}^{x} - (\mathrm{e}^{x} + x\,\mathrm{e}^{x}) = -x\,\mathrm{e}^{x} \begin{cases} = 0 & \text{si } x = 0 \\ < 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	0	$+\infty$
g	2	$\searrow$ $-\infty$

En effet, on a $g(0) = 2$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \mathrm{e}^{x}(1 - x)\right) = +\infty$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$. De plus, g est continue donc, d'après le théorème de la bijection, tout élément y de l'intervalle $]-\infty, 2]$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$. Comme $0 \in]-\infty, 2]$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{il existe un unique nombre } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } g(\alpha) = 0}$$

Commentaire

> Le théorème de la bijection (peut-être que vous l'appeliez « corollaire du théorème des valeurs intermédiaires » en Terminale) sera repris en détail en MPSI.

2. Par définition de α, on a $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{\alpha} + 1 - \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha} = 0$, soit encore $(\alpha - 1)\,\mathrm{e}^{\alpha} = 1$. Cette égalité implique que $\alpha - 1 \neq 0$ (car, sinon, cette égalité fournirait l'absurdité « $0 = 1$ »), si bien que l'on peut écrire que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \frac{\alpha}{\mathrm{e}^{\alpha} + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} &= \frac{\alpha}{\frac{1 + (\alpha - 1)}{\alpha - 1}} \\ &= \alpha \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} \\ &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha - 1}$$

3. On sait que la fonction g décroit (strictement) sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle s'annule en $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On en déduit le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}_+$ suivant :

x	0		α		$+\infty$
g		$+$	0	$-$	

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + 1 - x\,\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x} + 1)^2} = \frac{g(x)}{(\mathrm{e}^{x} + 1)^2}$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de f sur $\mathbb{R}_+$ est le même que celui de g. On en déduit les variations de f suivantes sur $\mathbb{R}_+$:

4. En fait, g est même dérivable sur $\mathbb{R}$ (tout comme la fonction f d'ailleurs).

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\alpha - 1$	$\searrow$	0

La limite de f en $+\infty$ s'obtient par croissances comparées. En effet, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\mathrm{e}^{x}} \times \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0 \times 1 = 0$$

Problème (étude d'une fonction).

Partie A : étude des limites de f

1. Notons $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f. On sait que la fonction exponentielle est définie [5] sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{D}_f &\iff 1+\mathrm{e}^{x} > 0 \qquad \text{car } \ln \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \mathrm{e}^{x} > -1 \qquad \text{ce qui est toujours vrai car on sait que } \mathrm{e}^{x} > 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En factorisant par e^{x} à l'intérieur du logarithme puis en utilisant les propriétés du logarithme, il vient :

$$\begin{aligned} f(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln\left(\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{-x}+1)\right) &= \mathrm{e}^{-x}\big(\underbrace{\ln(\mathrm{e}^{x})}_{=x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\big) \\ &= x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) \end{aligned}$$

et comme $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$, on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})}$$

(b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ (croissances comparées). De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to 0} \ln(1+y) = \ln(1) = 0$$

D'après le théorème concernant la limite d'une fonction composée, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = 0 \times 0 = 0$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

5. Cette fonction ne pose donc pas de problème dans la recherche du domaine de définition de f.

3. Par définition de f, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$$

Or, quand x tend vers $-\infty$, $h = \mathrm{e}^x$ tend vers 0. En utilisant le théorème concernant la limite d'une fonction composée, on a donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

d'après le résultat admis dans l'énoncé. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$$

4. Conséquences graphiques :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ admet deux asymptotes horizontales : la droite d'équation } y = 1 \text{ en } -\infty \text{ et la droite d'équation } y = 0 \text{ en } +\infty.}$$

Partie B : étude des variations de f et construction de $\mathscr{C}$

1. On note $\mathscr{D}_g$ le domaine de définition de g. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} t \in \mathscr{D}_g &\iff 1+t \neq 0 \text{ et } 1+t > 0 \qquad \text{car } \mathscr{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^* \\ &\iff t \neq -1 \text{ et } t > -1 \\ &\iff t > -1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\mathscr{D}_g =]-1, +\infty[}$$

2. (a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour démontrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée. Pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = -\frac{t}{(1+t)^2}$$

Pour tout $t > 0$, on a $g'(t) < 0$ (car $-t < 0$ et $(1+t)^2 > 0$) donc on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle }]0, +\infty[}$$

(b) La fonction g étant strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on sait en particulier que pour tout $t > 0$, on a $g(t) < g(0)$ et donc $g(t) < 0$ (puisque $g(0) = 0$). Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(t) < 0}$$

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables et pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{-x}\,\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\underbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x)}_{=g(\mathrm{e}^x)}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\,g(\mathrm{e}^x)}$$

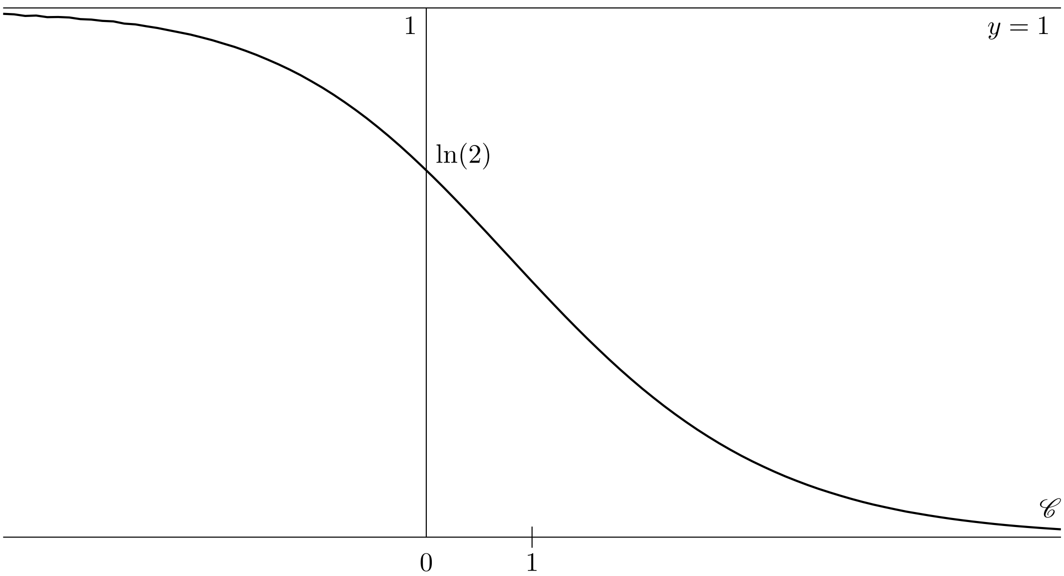
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathrm{e}^x \in]0, +\infty[$, on a $g(\mathrm{e}^x) < 0$ (car la fonction g est strictement négative sur l'intervalle $]0, +\infty[$ d'après la question 2.(b)). De plus, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\,g(\mathrm{e}^x) < 0$. Il s'ensuit donc que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$$

En reprenant les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$ obtenues aux questions 2.(b) et 3. de la **Partie A**, on obtient le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f	1 $\searrow$ 0

4. **Graphe $\mathscr{C}$ de la fonction** f (pour gagner de la place, l'unité graphique n'est pas respectée dans le corrigé) :



Commentaire

Il est important de faire figurer les asymptotes horizontales sur le graphique.

Exercice 10 (équation différentielle).

1. (a) Soit $C \in \mathbb{R}$. La fonction $y : x \longmapsto Cx$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle l'est même sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) = C$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} = C - C = 0$$

donc y est solution de $(\mathscr{H})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout } C \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } y : x \longmapsto Cx \text{ est solution de } (\mathscr{H}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

(b) La fonction y étant une solution de $(\mathscr{H})$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est dérivable sur cet intervalle. La fonction $z : x \longmapsto \dfrac{y(x)}{x}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z'(x) = \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y'(x) - \frac{y(x)}{x}\right) = \frac{1}{x} \times 0 = 0$$

car y est solution de $(\mathscr{H})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit bien que :

$$\boxed{\text{la fonction } z \text{ est constante sur l'intervalle } \mathbb{R}_+^*}$$

Il existe donc un nombre réel C tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z(x) = \frac{y(x)}{x} = C$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y(x) = Cx}$$

Notons $\mathrm{Sol}(\mathscr{H})$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{H})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- ⋆ Si $y \in \mathrm{Sol}(\mathscr{H})$ (c'est-à-dire si y est une solution de $(\mathscr{H})$ sur $\mathbb{R}_+^*$), alors on vient de montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y : x \longmapsto Cx$.
- ⋆ Réciproquement, on a montré à la question 1.(a) que toute fonction de la forme $y : x \longmapsto Cx$, où $C \in \mathbb{R}$, appartient à $\mathrm{Sol}(\mathscr{H})$.

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Sol}(\mathscr{H}) = \Big\{ y : x \longmapsto Cx \,\Big|\, C \in \mathbb{R} \Big\}}$$

2. (a) La fonction y_0 proposée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y_0'(x) = C'(x)x + C(x) \times 1 = C'(x)x + C(x)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
(y_0 \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) &\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} = x^2\right) \\
&\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2\right) \\
&\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x)x + C(x) - C(x) = x^2\right) \\
&\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C(x) = x\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{y_0 \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ si et seulement si pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \text{ on a } C'(x) = x}$$

On peut choisir $C : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ et on déduit de l'équivalence précédente que :

$$\boxed{\text{une solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est la fonction } y_0 : x \longmapsto \frac{x^3}{2}}$$

(b) Soit y une solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x^2 \tag{1}$$

Comme y_0 est également une solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} = x^2 \tag{2}$$

En soustrayant (2) à (1), il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y_0'(x) + \frac{y_0(x)}{x} = 0,$$

ce que l'on peut réécrire, en utilisant la linéarité de la dérivation [6] :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (y - y_0)'(x) - \frac{(y - y_0)(x)}{x} = 0$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{la fonction } y - y_0 \text{ est solution de } (\mathscr{H}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

6. Essentiellement : la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

(c) Notons $\mathrm{Sol}(\mathscr{E})$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- ⋆ Soit $y \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E})$. D'après la question précédente, on a $y - y_0 \in \mathrm{Sol}(\mathscr{H})$. La question 1.(b) nous donne l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y(x) - y_0(x) = Cx$$

On a obtenu l'expression de la fonction y_0 à la question 2.(a) donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y(x) = Cx + \frac{x^3}{2}$$

- ⋆ Réciproquement, soient $C \in \mathbb{R}$ et la fonction $y : x \longmapsto Cx + \dfrac{x^3}{2}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) = C + \frac{3x^2}{2}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} = C + \frac{3x^2}{2} - \frac{Cx + \frac{x^3}{2}}{x} = C + \frac{3x^2}{2} - C - \frac{x^2}{2} = x^2$$

La fonction y est donc solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $y \in \mathrm{Sol}(\mathscr{E})$.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\mathrm{Sol}(\mathscr{E}) = \left\{ y : x \longmapsto Cx + \frac{x^3}{2} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 11 (limite d'une suite d'intégrales).

1. La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme différence et composition de fonctions dérivables (on sait que la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t \in]-1, +\infty[$, on a $1 + t \in \mathbb{R}_+^*$) et :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \qquad f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{(1+t) - 1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$$

Pour tout $t \in]-1, +\infty[$, on a $1 + t > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de t. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f sur $]-1, +\infty[$ suivants (le calcul de $f(0)$ est immédiat et les limites ne sont pas nécessaires pour conclure quant à la question posée) :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	0	↗	

La fonction f est donc à valeurs positives ou nulles sur $]-1, +\infty[$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \qquad f(t) = t - \ln(1+t) \geqslant 0$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall t \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1+t) \leqslant t}$$

Commentaire

Soient φ et ψ deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour démontrer que :

$$\forall t \in I, \qquad \varphi(t) \leqslant \psi(t),$$

il peut être très utile d'étudier la fonction $\psi - \varphi$ sur l'intervalle I et constater, à l'aide du tableau de variations, que cette fonction est à valeurs positives sur I.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\dfrac{t}{\sqrt{n}} < 1$ car $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $\sqrt{n} > 1$ donc $1 - \dfrac{t}{\sqrt{n}} > 0$. On peut donc écrire que :

$$\forall t \in [0,1], \qquad \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Soit $t \in [0,1]$. On a $-\dfrac{t}{\sqrt{n}} \in]-1, +\infty[$ donc la question précédente nous permet d'écrire que :

$$\ln\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \leqslant -\frac{t}{\sqrt{n}} \qquad \text{puis} \qquad n \ln\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \leqslant -\sqrt{n} \times t$$

en multipliant par $n \geqslant 0$. Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n} \times t},$$

l'inégalité de gauche étant évidente. On applique maintenant la propriété de croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}t \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-\sqrt{n} \times t} \,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sqrt{n} \times t} \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n} \times t}}{\sqrt{n}}\right]_0^1 = \frac{-\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} + 1}{\sqrt{n}}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}}$$

3. Il est clair[7] que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 0$. Le théorème des gendarmes et les inégalités obtenues à la question précédente permettent donc de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n \geqslant 1} \text{ est convergente de limite } 0}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut calculer directement l'intégrale I_n :

$$I_n = \left[-\frac{\sqrt{n}}{n+1}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{n}}{n+1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1} + \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

Posons $\alpha_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}$ et $\beta_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$. Pour montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$, il suffit d'établir que :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim_{n \to +\infty} \beta_n = 0$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \beta_n \qquad \text{car} \qquad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1} \leqslant 1$$

Le théorème des gendarmes assure donc la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ vers 0. Finalement :

$$\boxed{\text{on retrouve bien la convergence de la suite } (I_n)_{n \geqslant 1} \text{ vers } 0}$$

7. Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur tend vers $+\infty$.