Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1 Soient $d, n, a \in \mathbb{Z}$. Vrai ou faux ? Justifier.

1. Le nombre 45 possède 12 diviseurs.
2. Si $n \equiv 1\,[35]$, alors n est impair.
3. Si a et b divisent d, alors ab divise d.
4. Si d divise ab, alors d divise a ou d divise b.
5. L'intervalle $[\![1, 1000]\!]$ contient 140 entiers divisibles par 7.
6. Soit $p, q \in \mathscr{P}$. Si $q - p = 11$, alors $p = 2$ et $q = 13$.
7. Si d divise n^2, alors d divise n.
8. Si $a^2 \equiv 1\,[n]$, alors $a \equiv \pm 1\,[n]$.
9. Si $4a \equiv 4b\,[13]$, alors $a \equiv b\,[13]$.
10. $4a \equiv 4b\,[13]$, alors $a \equiv b\,[6]$.

1 Divisibilité, division euclidienne, congruences

Exercice 2
1. Montrer que $2^{123} + 3^{121}$ est divisible par 11.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de :
   (a) 3^{2189} par 25 ;
   (b) 49^{90021} par 13.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fraction $f = \dfrac{21n+4}{14n+3}$ est-elle irréductible ?

Exercice 4 L'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ admet-elle des solutions rationnelles ?

Exercice 5
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $n(n+2)(7n-5)$ est divisible par 6.
2. Pour quels entiers $n \in \mathbb{Z}$ l'entier $n+1$ divise-t-il $n+7$?
3. Pour quels entiers $n \in \mathbb{Z}$ l'entier $n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$ est-il divisible par 10 ?
4. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ le produit $n(n+2)$ est-il une puissance de 2 ?

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $a_0, \dots, a_r$ les chiffres de la décomposition de n en base 10. Par exemple, pour $n = 156$, on a $a_0 = 6$, $a_1 = 5$ et $a_2 = 1$.

1. Montrer que n est divisible par 4 si et seulement si l'entier obtenu en ne conservant que les chiffres a_0 et a_1 l'est.
2. Montrer que n est divisible par 3 (respectivement 9) si et seulement si la somme $a_0 + \cdots + a_r$ l'est.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a_0, \dots, a_r$ pour que n soit divisible par 11.

Exercice 7 Soit $x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que $x^2 + y^2$ est divisible par 7 si et seulement si les entiers x et y le sont.

Exercice 8 Soit $p \in \mathscr{P} \setminus \{2, 3\}$. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $a \equiv b\,[n]$, alors $a^n \equiv b^n\,[n^2]$.

Exercice 10 Soient a un entier relatif impair et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^{2^n} \equiv 1\,[2^{n+1}]$.

2 PGCD, PPCM

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Justifier que les entiers :

$$20n^2 + 4n + 5 \qquad \text{et} \qquad 10n^2 + 2n + 2$$

sont premiers entre eux.

Exercice 12 Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Déterminer le PGCD de $a+b$ et de ab.

Exercice 13
1. Montrer que, pour tout entier naturel n, les nombres $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant le coefficient binomial $\binom{2n+1}{n+1}$, montrer que $\binom{2n}{n}$ est divisible par $n+1$.

Exercice 14 Soit $p \in \mathscr{P}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in [\![1, p-1]\!]$, le nombre premier p divise $\binom{p}{k}$.

2. En déduire que :
$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], \qquad \binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \, [p]$$

Exercice 15 Soit $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrer que, si a et b sont premiers entre eux, alors :
$$\frac{\ln(a)}{\ln(b)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Exercice 16 Soit $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $n^3 + 3n^2 - 5$ et $n+2$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que, si $a \wedge n = 1$, alors $(ab) \wedge n = b \wedge n$.
3. Montrer que :
$$\left(n^4 + 3n^2 - n + 2\right) \wedge \left(n^2 + n + 1\right) = (n-2) \wedge 7$$

Exercice 17 Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b}$.

3 Nombres premiers

Exercice 18 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, si a^2 divise b^2, alors a divise b.
2. Montrer que $(a \wedge b)^n = a^n \wedge b^n$.

Exercice 19 Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrer que, si a et b sont premiers entre eux, et si ab est la puissance k^{e} d'un entier, alors a et b sont des puissances k^{e} d'entiers.

Exercice 20 (formule de Legendre)

1. Montrer que :
$$\forall p \in \mathscr{P}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_p(n\,!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$
où la somme est *faussement* infinie puisque la partie entière est nulle dès que $p^k > n$.
2. Par combien de zéros l'entier $100\,!$ se termine-t-il ?

Exercice 21 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n^{e} nombre premier. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad p_{n+1} < p_1 \dots p_n$$

Exercice 22 (nombres de Mersenne) Soient $a, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On suppose que $a^n - 1 \in \mathscr{P}$.

1. Montrer que $a = 2$.
2. Montrer que n est un nombre premier.

Exercice 23 (nombres de Fermat)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $2^n + 1 \in \mathscr{P}$, alors n est une puissance de 2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (ce nombre est appelé le n^{e} nombre de Fermat).
   (a) Montrer que $F_{n+1} = F_0 \dots F_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $m \neq n$, les nombres F_m et F_n sont premiers entre eux.

Exercice 24 (théorème de Wilson) Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Wilson :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n \text{ est premier} \iff (n-1)\,! \equiv -1 \, [n]$$

1. Supposons que n soit un nombre premier.
   (a) Déterminer les solutions de l'équation $x^2 \equiv 1 \, [n]$.
   (b) Montrer que $(n-1)\,! \equiv -1 \, [n]$.
2. On suppose que $(n-1)\,! \equiv -1 \, [n]$. Montrer que pour tout $a \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\mathrm{pgcd}(a, n) = 1$. Conclure.

4 Équations diophantiennes

Exercice 25 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}^2$:

1. $15x + 6y = 3$;
2. $42x + 28y = 14$;
3. $9x + 270y = 7$.

Exercice 26

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5x \equiv 2 \, [34]$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système d'équations suivant :
$$\mathscr{S} : \begin{cases} x \equiv 3 \, [5] \\ x \equiv 4 \, [7] \end{cases} \qquad \mathscr{T} : \begin{cases} x \wedge y = 3 \\ x + y = 21 \end{cases}$$
Indication : pour le premier système, on commencera par chercher un couple de coefficients de Bézout pour les entiers 5 et 7.