Applications

1 Image directe, image réciproque

Exercice 1 1. Soit $f : x \longmapsto \sin(\pi x)$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f(]0,1])$, $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}([0,1])$.

2. Déterminer l'image réciproque de $[-1,2]$ par la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x^2+3x+2}$.
3. Soit $h : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
   (a) Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par f.
   (b) Montrer que h est injective sur $[-1,1]$ et déterminer $\left(h|_{[-1,1]}\right)^{-1}$.
   (c) Déterminer $h^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2},1\right]\right)$.

Exercice 2 Soient E et F deux ensembles, $f \in F^E$ et $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que $(A \subset B) \Longrightarrow (f(A) \subset f(B))$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et que l'inclusion réciproque est fausse en général.
3. Montrer que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ et que l'inclusion réciproque est fausse en général.

Exercice 3 Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si :
$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \qquad f^{-1}(f(A)) = A$$
4. Montrer que, pour tous $B, B' \in \mathscr{P}(F)$, on a les égalités :
$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

Exercice 4 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que f est injective si, et seulement si :
$$\forall A, A' \in \mathscr{P}(E), \qquad f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

2 Injectivité et surjectivité

Exercice 5 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifier.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array} \right.$
3. $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-x+3}{2x+1} \end{array} \right.$
4. $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 \end{array} \right.$
5. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+3y \end{array} \right.$
6. $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 2n+5 \end{array} \right.$

Exercice 6 Montrer que l'application $\varphi : (a,b) \longmapsto a + b\sqrt{2}$ est injective de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g_1 : F \longrightarrow G$ et $g_2 : F \longrightarrow G$ des applications. On suppose que f est surjective et que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$.

Exercice 8 Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel n, on ait $f(n) \leqslant n$.

Exercice 9 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer qu'alors $f = \mathrm{Id}_E$.
2. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 10 On considère l'application :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ X & \longmapsto & X \cap 2\mathbb{N} \end{array} \right. ,$$
où $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs.

1. L'application φ est-elle injective ?

2. L'application φ est-elle surjective ? Déterminer son image.

Exercice 11 Soient E un ensemble et A une partie de E. On considère l'application :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cup A \end{array} \right.$$

1. L'application ψ est-elle injective ?
2. L'application ψ est-elle surjective ? Déterminer son image.

Exercice 12 Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

1. *Étude de l'injectivité de f.*
   (a) Calculer $f(\varnothing)$.
   (b) Calculer $f(\overline{A \cup B})$.
   (c) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. *Étude de la surjectivité de f.*
   (a) Le couple $(\varnothing, B)$ admet-il un antécédent par f ?
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit surjective.

3 Bijections

Exercice 13 On considère les deux applications :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, mais que ni f ni g n'est bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Que faut-il en retenir ?

Exercice 14 Déterminer une bijection explicite de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 15 Montrer que l'application :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, x-y) \end{array} \right.$$

est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 16 Montrer que l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array} \right.$$

est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 17
1. Montrer que la fonction tangente hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et déterminer une expression explicite de sa réciproque.
2. Même question avec la fonction sinus hyperbolique sur son domaine de définition.

Exercice 18 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 19 Montrer que l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (m,n) & \longmapsto & 2^m(2n+1) \end{array} \right.$$

est bijective.

Exercice 20 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$ deux applications. On suppose que :

$$g \circ f \circ g = f \qquad \text{et} \qquad f \circ g \circ f = g$$

1. On suppose que f est injective. Montrer que f et g sont bijectives.
2. On suppose que g est surjective. Montrer que f et g sont bijectives.